제 2 교시

수학 영역(가형&나형)

1,2번 ⇨ 수1

3,4번 ⇨ 확통

5,6번 ⇨ 수2

7,8번 ⇨ 미적분

→ 가형은 전문항 풀기, 나형은 1번~6번까지 풀기

5지선다형	단답형

1. 함수 $f(x)=\log_3 x$와 그 역함수 $g(x)$에 대하여

$$g(1)=f(a)+f(b)-f(c)$$

가 성립할 때, $\dfrac{ab}{c}$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 양수이다.)[4점]

2. 자연수의 순서쌍 (a, b)은 다음을 만족한다.

$$9^{2^a}=b\times 2^{100}+1$$

이때, 가능한 a의 최솟값을 구하는 과정이다.

$9^{2^a}=b\times 2^{100}+1$에서 1을 좌변으로 이항하면

$9^{2^a}-1=b\times 2^{100}$이다.

$9^{2^a}-1$

$=(\boxed{(가)})(9+1)(9^2+1)(9^4+1)(9^8+1)\cdots(9^{2^{a-1}}+1)$

$=b\times 2^{100}$ 에서 양변을 $\boxed{(가)}$로 나누면

$(9+1)(9^2+1)(9^4+1)(9^8+1)\cdots(9^{2^{a-1}}+1)=b\times 2^{\boxed{(나)}}$

이다.

자연수 k에 대하여 9^k+1꼴은 8로 나눌 때 나머지가 $\boxed{(다)}$

이다.

따라서

$(9+1)(9^2+1)(9^4+1)(9^8+1)\cdots(9^{2^{a-1}}+1)$

$=(8+\boxed{(다)})(8\times 10+\boxed{(다)})(8\times\boxed{}+\boxed{(다)})\cdots(8\times\boxed{}+\boxed{(다)})$ ⋯㉠

$=\cdots+2^{(\ )의 개수}$

이고 이 수가 $2^{\boxed{(나)}}$의 배수가 되기 위해서는 ㉠의 ( )의 개수가 $\boxed{(나)}$이상이어야 한다.

따라서 a의 최솟값은 $\boxed{(나)}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p+q+r$의 값은? [4점]

① 95　② 100　③ 107　④ 115　⑤ 120

3. 모집단의 확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같다.

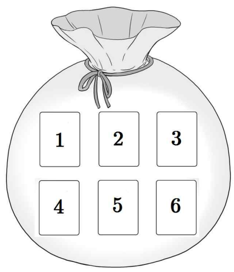
X	-1	0	1	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

이 모집단에서 크기가 5인 표본을 임의 추출할 때의 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{E}(\overline{X}^2)$의 값은? [4점]

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

4. 그림과 같이 주머니에 1, 2, 3, 4, 5, 6의 숫자가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 들어 있다. 다음 조건을 만족시키면서 이 주머니에서 임의로 1장의 카드를 뽑아 카드에 적힌 수를 확인하고 뽑은 카드를 주머니에 다시 넣을 때, 카드 뽑기를 중단할 때까지 3의 배수가 적힌 카드가 나올 확률은 $\frac{a}{3\times6^4}$이다. 상수 a의 값은? [4점]

(가) 첫 번째 뽑은 카드에 적힌 수가 3의 배수가 아니면 카드를 계속 뽑고 뽑은 카드에 적힌 수가 3의 배수이면 카드 뽑기를 중단한다.
(나) n번째 뽑은 카드에 적힌 수가 3의 배수이거나 $(n-1)$번째 뽑은 카드에 적힌 수보다 작거나 같으면 카드 뽑기를 중단하고 그렇지 않은 경우에는 카드를 한 번 더 뽑는다. (단, $n\geq2$)



① 1861 ② 1201 ③ 1801 ④ 2401 ⑤ 4595

5. 실수 a, b에 대하여 $\lim_{x \to -1} \frac{2x^{10}+x^9+a}{x+1} = b$ 일 때, $a-b$의 값을 구하시오. [4점]

6. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (x<0) \\ (x-1)^2+1 & (0 \le x \le 1) \\ x & (x>1) \end{cases}$$

가 있다. 실수 t에 대하여 부등식 $f(x) \ge f(t)$를 만족시키는 실수 x의 최솟값을 $g(t)$라 하자. 예를 들어, $g(1)=-1$이다.

함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 불연속일 때,

$$\int_{-2}^{\alpha} g(t)\,dt = -\frac{q}{p}$$

이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

7. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=\begin{cases} e^{x-1}-1 & (x<1) \\ \ln x & (x>1) \end{cases}$$

이다. $f(e)=2$일 때, $f(0)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{e}-1$ ② $\frac{1}{e}$ ③ $\frac{1}{e}+1$ ④ $\frac{1}{e}+\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{1}{e}+2$

8. 실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 두 곡선 $y=\frac{1}{4}\cos 2x$와 $y=\cos x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 A에서 $y=\frac{1}{4}\cos 2x$에 접하는 접선과 점 B에서 $y=\cos x$에 접하는 접선이 이루는 예각의 크기를 $\theta(t)$라 하자. $\lim_{t\to 0}\frac{\tan^2\theta(t)}{t^6}=k$일 때, $100k$의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

랑데뷰 쉬사준킬 제67회 해설

1	2	3	4
27	③	①	④
5	6	7	8
10	25	③	25

출제
대구 송원학원 황보백 선생님

1) 정답 27
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

함수 $f(x)=\log_3 x$의 역함수는 $g(x)=3^x$이므로
$g(1)=3$
$g(1)=f(a)+f(b)-f(c)$에서
$3=\log_3 a+\log_3 b-\log_3 c$
$=\log_3 ab-\log_3 c$
$=\log_3 \dfrac{ab}{c}$
따라서 $\dfrac{ab}{c}=3^3=27$

2) 정답 ③
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$9^{2^n}=b\times 2^{100}+1 \rightarrow 9^{2^n}-1=b\times 2^{100}$에서
$9^{2^n}-1$
$=(9-1)(9+1)(9^2+1)(9^4+1)(9^8+1)\cdots(9^{2^{n-1}}+1)$
$=b\times 2^{100}$ 에서 양변을 8로 나누면
$(9+1)(9^2+1)(9^4+1)(9^8+1)\cdots(9^{2^{n-1}}+1)=b\times 2^{97}$
에서 9^k+1꼴은 8로 나눌 때 나머지가 2이다.
따라서
$(9+1)(9^2+1)(9^4+1)(9^8+1)\cdots(9^{2^{n-1}}+1)$
$=(8+2)(8\times 10+2)(8\times\square+2)\cdots(8\times\square+2)$
$=\cdots+2^{(\ )\text{의개수}}$
이고 이 수가 2^{97}의 배수가 되기 위해서는 ( )의 개수가 97 이상이어야 한다.
따라서 a의 최솟값은 97
따라서 $p=8,\ q=97,\ r=2$이다.
$p+q+r=107$

3) 정답 ①
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$\mathrm{E}(X)=(-1)\times\dfrac{1}{6}+0\times\dfrac{1}{3}+1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$
$\mathrm{V}(X)=(-1)^2\times\dfrac{1}{6}+0^2\times\dfrac{1}{3}+1^2\times\dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{5}{9}$
이때, 표본의 크기가 5이므로
$\mathrm{E}(\overline{X})=\dfrac{1}{3},\ \mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\frac{5}{9}}{5}=\dfrac{1}{9}$
$\therefore\ \mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2=\dfrac{1}{9}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{2}{9}$

4) 정답 ④
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

카드 뽑기를 중단할 때까지 3의 배수가 적힌 카드가 나오는 상황은 6이 나오면서 중단되는 경우와 3이 나오면서 중단되는 경우이다.
(1) 숫자 6이 나와 카드 뽑기를 중단하는 경우
(i) 6이 적힌 카드가 첫 번째 시행에서 나올 확률은 $\dfrac{1}{6}$
(ii) 6이 적힌 카드가 두 번째 시행에서 나올 확률은
첫 번째 시행에서 3, 6이 나오지 않고 두 번째 시행에서 6이 나와야 하므로
$\dfrac{4}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{4}{6^2}$
(iii) 6이 적힌 카드가 세 번째 시행에서 나오는 경우는 첫 번째, 두 번째 시행에서 나오는 카드에 적힌 수가 다음과 같을 때이다.
$(1,2),\ (1,4),\ (1,5),\ (2,4),\ (2,5),\ (4,5)$
따라서 구하는 확률은
$\dfrac{6}{6^2}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{6}{6^3}$
(iv) 6이 적힌 카드가 네 번째 시행에서 나오는 경우는 첫 번째, 두 번째, 세 번째 시행에서 나오는 카드에 적힌 수가 다음과 같을 때이다.
$(1,2,4),\ (1,2,5),\ (1,4,5),\ (2,4,5)$
따라서 구하는 확률은
$\dfrac{4}{6^3}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{4}{6^4}$
(v) 6이 적힌 카드가 다섯 번째 시행에서 나오는 경우는 첫 번째, 두 번째, 세 번째, 네 번째 시행에서 나오는 카드에 적힌 수가 다음과 같을 때이다.
$(1,2,4,5)$
따라서 구하는 확률은
$\dfrac{1}{6^4}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{6^5}$
(i)~(v)에서 카드 뽑기를 중단할 때까지 6이 적힌 카드가 나올 확률은
$\dfrac{1}{6}+\dfrac{4}{6^2}+\dfrac{6}{6^3}+\dfrac{4}{6^4}+\dfrac{1}{6^5}$

$=\dfrac{6^4+4\times6^3+6^3+4\times6+1}{6^5}=\dfrac{2401}{6^5}$

(2) 숫자 3이 나와 카드 뽑기를 중단하는 경우

(1)과 같은 상황이다. $\dfrac{2401}{6^5}$

(1), (2)에서

카드 뽑기를 중단할 때까지 3의 배수가 적힌 카드가 나올 확률은

$2\times\dfrac{2401}{6^5}=\dfrac{a}{3\times6^4}$

따라서 $a=2401$

5) 정답 10

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

극한값 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^{10}+x^9+a}{x+1}$ 가 존재하고

(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

곧, $\lim\limits_{x\to-1}(2x^{10}+x^9+a)=0$ 이어야 한다.

$2-1+a=0 \quad \therefore a=-1$

$f(x)=2x^{10}+x^9-1$ 로 놓으면 $f(-1)=0$ 이므로

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^{10}+x^9+a}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)$

그런데 $f'(x)=20x^9+9x^8$ 이므로

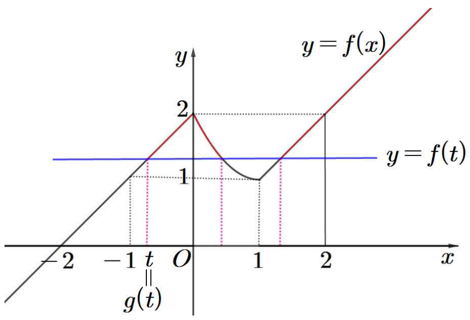
$b=f'(-1)=-20+9=-11$

$\therefore a-b=-1-(-11)=10$

6) 정답 25

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

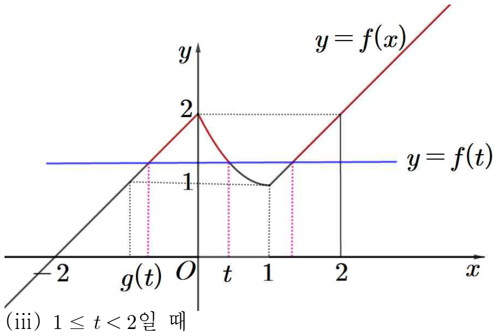
(i) $t<0$일 때



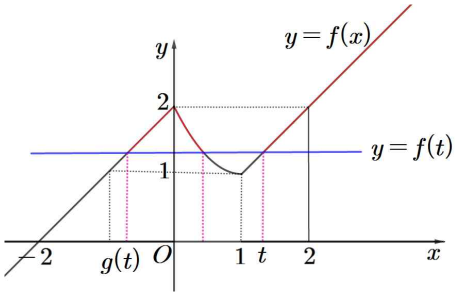
$g(t)+2=t+2$이므로 $g(t)=t$

(ii) $0\le t<1$일 때

$g(t)+2=(t-1)^2+1$이므로 $g(t)=(t-1)^2-1$

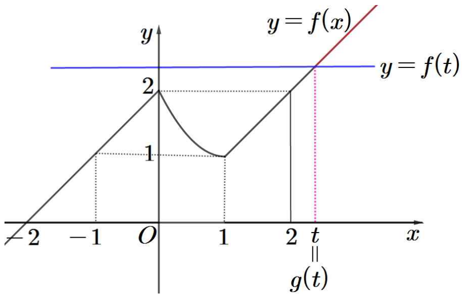


(iii) $1\le t<2$일 때



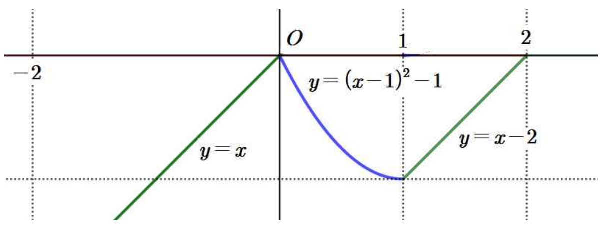
$g(t)+2=t$이므로 $g(t)=t-2$

(iv) $t\ge2$일 때



$g(t)=t$

따라서 $\alpha=2$이고 $y=g(x)$ $(-2\le x\le 2)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서

$$\int_{-2}^{2}g(t)\,dt=\int_{-2}^{0}t\,dt+\int_{0}^{1}\{(t-1)^2-1\}\,dt+\int_{1}^{2}(t-2)\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_{0}^{1}+\left[\frac{1}{2}t^2-2t\right]_{1}^{2}$$

$$=-2+\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\frac{19}{6}$$

따라서 $p=6,\ q=19$

$p+q=25$

7) 정답 ③

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

함수 $f'(x)$를 적분하면

$$f(x)=\begin{cases} e^{x-1}-x+C_1 & (x<1) \\ x\ln x-x+C_2 & (x>1) \end{cases}$$

(단, C_1, C_2는 적분상수)

$f(e)=e\ln e-e+C_2=2$이므로 $C_2=2$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}f(x)=f(1)$

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to1-}f(x)=1-1+C_1$

$1=1-1+C_1$이므로 $C_1=1$

$$\therefore\ f(x)=\begin{cases} e^{x-1}-x+1 & (x<1) \\ x\ln x-x+2 & (x>1) \end{cases}$$

따라서 $f(0)=\dfrac{1}{e}+1$

8) 정답 25

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$A\left(t,\ \dfrac{1}{4}\cos2t\right),\ B(t,\ \cos t)$이다.

따라서 점 A에서의 접선이 x축과 이루는 각을 α, 점 A에서의 접선이 x축과 이루는 각을 β라 하면 $\theta(t)=|\beta-\alpha|$이다.

$\tan\alpha=-\dfrac{1}{2}\sin2t=-\sin t\cos t,\ \tan\beta=-\sin t$

따라서

$$\begin{aligned}\tan(\theta(t))&=|\tan(\beta-\alpha)|\\ &=\left|\frac{-\sin t+\sin t\cos t}{1+\sin^2 t\cos t}\right|\\ &=\left|\frac{-\sin t(1-\cos t)}{1+\sin^2 t\cos t}\right|\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0}\frac{\tan^2\theta(t)}{t^6}&=\lim_{t\to0}\left(\frac{\sin^2 t(1-\cos t)^2}{t^6}\times\frac{1}{(1+\sin^2 t\cos t)^2}\right)\\ &=\left(\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}\right)^2\times\left(\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{t^2}\right)^2\times1\\ &=1^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times1=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

따라서 $k=\dfrac{1}{4}$

$100k=25$