기·출·의 파·급·효·과

수학1

수학1

기출의 파급효과

orbi.kr

수학1

저자의 말

안녕하세요. 오르비 파급효과입니다. 집필한 지 2년째네요. 재작년에 EBS 선별과 칼럼으로, 작년에는 기출의 파급효과 시리즈를 통해 큰 사랑을 받았습니다. 이까지 오는 데 너무 과분한 사랑을 주신 분들 너무 감사합니다. 이제 본격적으로 교재 소개를 해보겠습니다.
저는 다음과 같은 교재를 만들었습니다.

1. 수학1 기출을 푸는 데 정말 필요한 태도와 도구만을 모두 정리했습니다.

각 Chapter를 나누는 기준이 교과서 목차가 아닌 기출을 푸는데 정말 필요한 태도와 도구입니다. 기존 개념서들보다 훨씬 얇습니다. 빠르게 실전 개념을 정리할 수 있습니다. 예시해설까지 꼼꼼히 읽는다면 준킬러, 킬러 문제에서 생각의 틀이 확실히 잡힐 것입니다. 각 Chapter를 '순서대로' 학습하신다면 더욱 큰 학습효과를 기대할 수 있습니다.

2. 기출에 대한 태도와 도구들을 바로 활용할 수 있도록 준킬러 이상급의 기출들을 본문 속 예시로 들었습니다. 20학년도 수능 경향과 해당 기출까지 반영되어 있습니다.

수학1 기출 중 평가원 21, 30번은 물론 오답률이 높은 문제들을 예시로 들었습니다. 본문 속 태도와 도구가 킬러, 준킬러에서 어떻게 보편적으로 이용되는지 직접 확인한다면 더욱 태도와 도구들이 더욱 와닿을 것입니다. 어떠한 한 문제에만 적용되는 특수한 스킬 같은 것이 아닙니다.

예시로 든 들어주는 평가원 기출을 태도와 도구뿐만 아니라 진화 단계별로도 배치했습니다. 예시들을 '순서대로' 풀다보면 자연스럽게 기출의 진화과정을 느낄 수 있습니다. 기출의 진화과정을 느낀다면 자연스럽게 기출에 대한 태도와 도구들이 정리됩니다. 태도와 도구 정리가 완성되면 최종 진화 형태인 후반부의 최신 기출문제는 혼자 clear 할 수 있고 이에 대한 보람을 느끼실 겁니다.

예전 킬러 문제에 쓰였던 아이디어 2개 이상이 현재의 준킬러, 킬러에 쓰입니다. 수능 때 21번, 29번, 30번을 풀 생각이 없어 과거의 21번, 29번, 30번을 제대로 학습하지 않는 우를 범한다면 준킬러도 못 풀거나 빨리 풀기 힘듭니다. 따라서 태도와 도구를 기반으로 한 기출의 킬러 학습은 필수입니다.

3. 평가원 문항뿐만 아니라 교육청, 사관학교 문항도 중요한 기출들입니다.

최근 교육청 및 사관학교 문제가 진화한 형태가 평가원에 출제되고 있습니다. 19학년도 수능 29번의 경우 14학년도 사관학교 15번과 매우 유사하고 20학년도 6월 평가원 21번, 30번은 18년 10월 교육청 21번, 30번과 매우 유사합니다. 따라서 기존 평가원 기출만을 푸는 것만으로 현재 수능을 대비하기는 힘듭니다. 하지만 교육청 및 사관학교 문제들까지 모두 풀자니 양이 너무 많습니다.

이를 해결하기 위해 핵심적인 평가원, 교육청, 그리고 사관학교 문제를 필요한 만큼만 선별했습니다. 본문과 함께 있는 예시 문제들은 수학1 교재의 경우 대략 100문제 정도입니다. 예시에 있는 문제 수만으로 부족함을 느끼실 분들을 위해 예시보다는 다소 쉬운 유제들도 기출에 대한 태도와 도구를 체화하기 시키기 위해 충분히 넣었습니다. 수학1 교재의 경우 유제는 대략 150문제입니다. 본문 속 예시뿐만 아니라 유제들도 단순 단원별로 분리된 것이 아니라 기출에 대한 태도와 도구를 기준으로 분리되었습니다.

4. 칼럼 속 예시해설과 유제 해설은 문제를 푸는데에 있어 필요한 생각의 흐름을 매우 자세하게 담았습니다.

예시 해설과 유제 해설은 단계별로 분리되어 있어 가독성이 좋아 이해가 더욱 쉽습니다. 문제에서 필요한 태도와 도구들을 어떻게 쓰는지 과외처럼 매우 자세히 알려줍니다. 유제는 칼럼과 예시들을 잘 학습했다면 무리없이 풀 수 있는 수준입니다.

하루에 예시를 포함한 Chapter 하나만 완료하고 유제 15문제만 푸세요! 이를 실천하면 수학1 교재를 모두 끝내는 데에 2주가 걸립니다. 이 교재를 최소 2번 이상 볼 수 있습니다.

수학 가형 4등급 초반이 1등급 컷 이상 받는 데 1달에서 2달 사이로 걸립니다.
약 파는 것 아닙니다. 과장된 광고를 극히 싫어하는 편입니다.

저도 18학년도 6월 평가원 때 3등급 받고 여름방학 때 이 책의 내용대로 기출을 학습하고 18학년도 9월 평가원, 18학년도 수능 1등급을 가볍게 받아냈습니다.

제 과외 학생은 19학년도 6월 평가원 때 4등급에 가까운 3등급이었으나 이 방법대로 1달간 기출을 학습하고 19학년도 수능 96점을 받아내었습니다.

수학 1등급, 아직 늦지 않았습니다. 마지막으로 한 번쯤 봐야 할 기출, 기출의 파급효과와 함께 합시다.

기출의 파급효과	EBS 선별	기대 모의고사
기출에 대한 일관적인 도구와 태도를 지향하는 교재입니다. 도구와 태도 체화를 위해 준킬러 이상의 기출을 주로 다루며, 고득점에 필요한 도구와 태도의 빠른 체화를 돕는 교재입니다.	최근 3년간 수학영역에서의 EBS의 위상은 어느 때보다 높아졌습니다. EBS 전문항 1회독은 준필수이며, 변형이 예상되거나 교훈이 많은 문제들은 파급효과와 기대T가 제작하는 EBS 선별집을 참고하여 다독하시면 좋습니다.	기대 모의고사는 철저하게 최근 수능과 당해 평가원의 출제 기조에 기반한 경향성에 중점을 둔 교재입니다. 당해 평가원의 출제경향과 EBS 변형 Point를 예측하여 최고의 실전감을 선물합니다.
- 수학 1 - 수학 2 (상) (하) - 미적분 (상) (하) - 확률과 통계	- EBS 선별집 (9월 중순) - EBS FINAL 선별집 (11월 중순)	- 가형 (7월 출판 예정) - 나형 (7월 출판 예정)

CHAPTER

04 삼각함수, 사인법칙, 코사인법칙

Chapter 4 앞부분에서 다룰 내용은 삼각함수에 관한 기본적인 내용이다. 아직 삼각함수에 익숙지 않은 학생들은 Chapter 4의 처음부터 끝까지 '제대로' 공부하는 것을 추천한다. 하지만 삼각함수에 그리 큰 어려움을 겪지 않는다면 Chapter 4 앞부분은 내용만 훑고 관련 예제들만 풀고 지나가도 문제없다.

Chapter 4 뒷부분에서부터는 사인법칙, 코사인법칙뿐만 아니라 꼭 표시해야 할 도형적 요소, 도형 성질 등을 소개하기에 도형이 약한 학생들한테 큰 도움이 될 것이다.

삼각함수 기초

1. 라디안은 무엇인가? 왜 쓰는가?

이번 교육과정에서는 저번 교육과정과 달리 이과뿐만 아니라 문과도 삼각함수에 대해 배운다.
삼각함수, 호도법(라디안)을 처음 배우는 문과는 '**라디안을 대체 왜 쓰는가?**'에 대한 질문을 한다.
왜냐면 초등학교 때부터 지금까지 멀쩡히 60도, 30도 등등 도($^\circ$)를 단위로 하는 육십분법을 잘 써왔기 때문이다.

처음에 라디안에 익숙해지기 위해 $\pi=180^\circ$를 무작정 외울 것이다. 하지만 우리는 π를 처음 보는 건 아니다.
초등학교 때 원의 둘레, 원의 넓이를 배우면서 접했을 것이다. 이때 배운 $\pi=3.141592\cdots$이다.

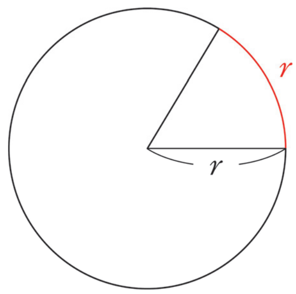
여기서 많이들 의문이 드는 학생들이 있을 것이다. "그러면 $\pi=180^\circ=3.141592\cdots$인 것입니까?
아니면 삼각함수에서 쓰이는 π랑 초등학교 때 배운 무리수 π랑 다른 건가?"

결론부터 말하면 $\pi=3.141592\cdots$이 맞고, $\pi(\mathrm{rad})=180^\circ$인 것이다.
정리하면 $\pi(\mathrm{rad})=3.141592\cdots(\mathrm{rad})=180^\circ$ **이라는 것이다.** rad**은 편의상 생략하는 것뿐이다.**
이는 곧 $1^\circ=\dfrac{\pi}{180}(\mathrm{rad})$, $1(\mathrm{rad})=\dfrac{180^\circ}{\pi}$**을 의미한다.**

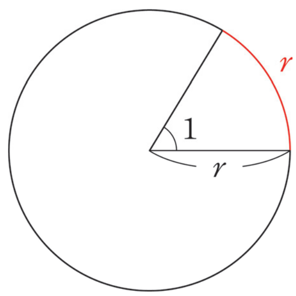
π, $3.141592\cdots$, 180° 사이의 관계에 대한 의문은 해결되었는가?
이제 **왜 라디안을 쓰는지** 알아보도록 하자.

아주 오래 전 이탈리아로 가보자. 피자의 둘레를 재는 상황이다.
둘레를 어떻게 대략적으로 편하게 잴 수 있을까? 이때 정확하게 180등분 되어있는 각도기가 있었겠는가?
당연히 없다. 이 시대 기술로 어떻게 정확하게 만들겠는가.

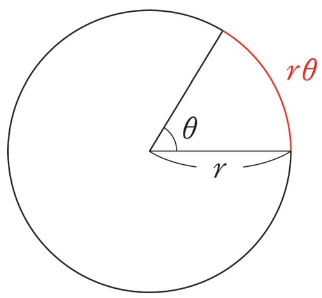
피자의 반지름 길이의 밧줄로 둘레를 대략적으로 재보는 건 어떨까?



위와 같이 말이다.



이때 **중심각을 '1'**이라고 해보는 건 어떨까? **호의 길이가 반지름 길이의 '1배'**이니까 직관적으로 와닿는다.

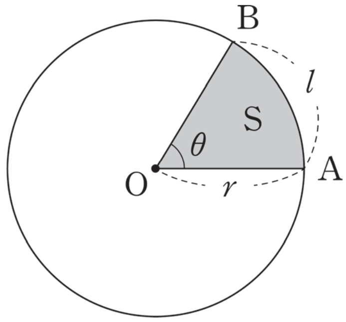


이런 식으로 하면 **중심각이 'θ'이니 위 그림의 호의 길이는 r의 'θ배'**로 쉽게 표현할 수 있다.

그렇다. $l=r\theta$는 호의 길이를 표현하는 '라디안식 공식'이 아니다. 라디안이 이런 식으로 '정의'된 것이다.
'1 라디안'은 편하게 '호의 길이=반지름 길이'가 될 때의 중심각의 크기라고 보면 된다.
이걸 편하게 단위로 설정한 것이다.

오히려 '라디안'을 단위로 하는 호도법이 '도'를 단위로 하는 육십분법보다 직관적이지 않은가?
원 둘레는 알다시피 $2\pi r$이다. 우리는 **"원의 둘레는 원의 반지름 r의 '2π배'구나!"**라고 볼 수 있다.
이래서 우리가 편의에 의해 $\pi(\mathrm{rad})=180^\circ$ 이렇게 외우고 다니는 것이다.

2. 부채꼴의 호의 길이와 넓이



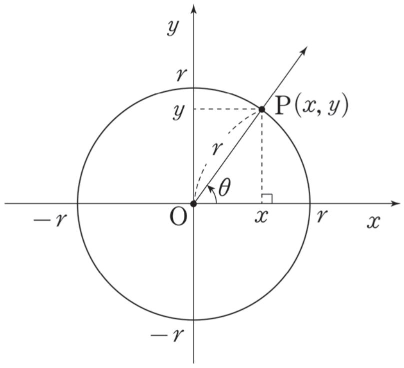
반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 $\theta\,(\mathrm{rad})$인 부채꼴에서 **호의 길이 l과, 넓이를 S라 하면**

호의 길이는 $l = r\theta$이고, 부채꼴의 넓이는 $S = \dfrac{1}{2}r^2\theta = \dfrac{1}{2}rl$이다.

증명은 다음과 같다. **호의 길이를 l과 부채꼴의 넓이 S는 중심각의 크기 $\theta\,(\mathrm{rad})$에 비례하므로**

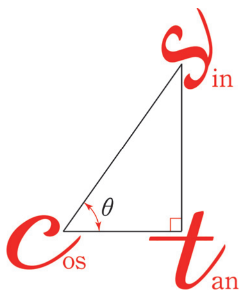
$l : 2\pi r = \theta : 2\pi$에서 $l = r\theta$이고, $S : \pi r^2 = \theta : 2\pi$에서 $S = \dfrac{1}{2}r^2\theta = \dfrac{1}{2}rl$이다.

◆ 3. 삼각함수 정의, 삼각함수의 부호



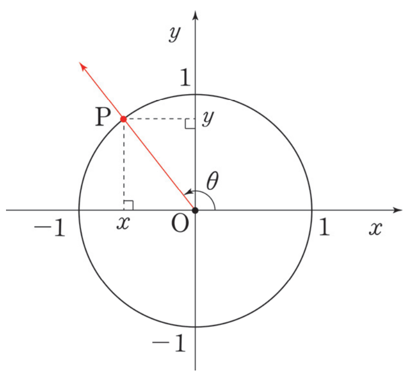
원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 한 점을 $\mathrm{P}(x, y)$, x축의 양의 방향을 시초선으로 하였을 때 동경 OP가 나타내는 각의 크기가 θ일 때, θ에 대한 삼각함수는 $\sin\theta=\dfrac{y}{r}$, $\cos\theta=\dfrac{x}{r}$, $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ 이다.

※ $\sin$은 동경과 단위원의 교점의 y좌표, $\cos$는 동경과 단위원의 교점의 x좌표, $\tan$는 동경의 기울기로 생각하면 편하다.



θ가 예각일 때, $\sin\theta=\dfrac{y}{r}$, $\cos\theta=\dfrac{x}{r}$, $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ 를 쉽게 기억하는 방법은 위의 그림과 같다.

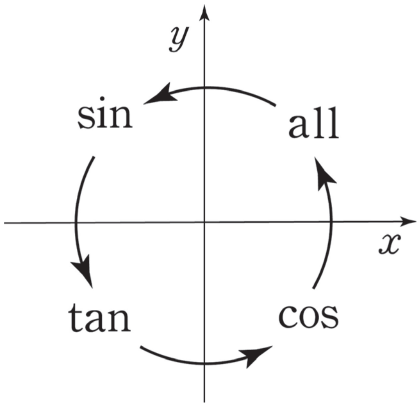
다만, θ와 직각의 위치에 유의하자.



θ가 예각이 아니더라도 $\sin\theta=\dfrac{y}{r}$, $\cos\theta=\dfrac{x}{r}$, $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ 는 성립한다.

추가적으로 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$로부터 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$을 얻을 수 있고,

점 $\mathrm{P}(x, y)$는 점 $\mathrm{P}(r\cos\theta, r\sin\theta)$이고 원 $x^2+y^2=r^2$위에 있으므로 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$를 얻을 수 있다.



θ가 어떤 각이라도 $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$, $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$, $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ **는 성립한다.**

이를 바탕으로 각 사분면에서의 삼각함수의 부호는 위의 그림과 같다.

'얼싸안고', '올싸탄코' 등등으로 외우면 된다.
위 그림의 의미는 각 사분면 위에 사인, 코사인, 탄젠트 중 양이 되는 것을 적어둔 것이다.

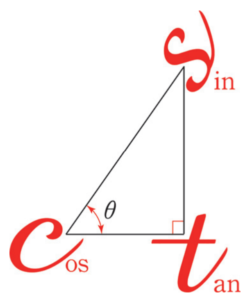
제1 사분면에서는 사인, 코사인, 탄젠트 모두가, 제2 사분면에서는 사인만, 제3 사분면에서는 탄젠트만, 제4 사분면에서는 코사인만 부호가 양이 된다.

◆ 4. 삼각함수 값 실수 없이 구하기

$\sin\frac{\pi}{3}$, $\cos\frac{\pi}{4}$, $\tan\frac{\pi}{6}$

삼각함수를 처음 배우고 호도법(라디안)에 약간 익숙해지면 위와 같은 값을 구하는 데에는 전혀 문제가 없을 것이다.

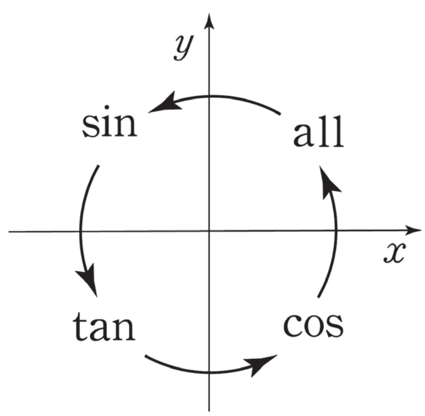
왜? $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서는 아래와 같이 삼각형 그리고 사인, 코사인, 탄젠트 값을 구하면 된다.



그러면 주로 실수는 어디서 나올까?

바로 $\theta>\frac{\pi}{2}$일 때이다. 어떻게 하면 실수를 줄일 수 있을까?

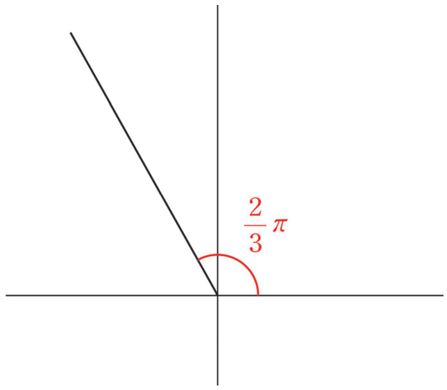
먼저 이전에 알려준 삼각함수의 부호를 나타낸 아래 그림을 머릿속에 넣도록 하자.



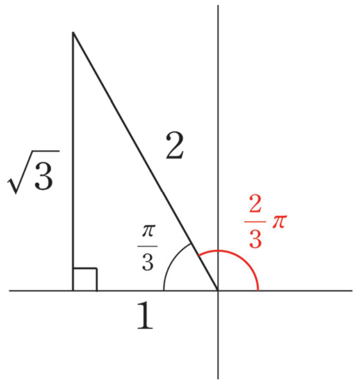
두 번째로 알아두어야 할 것은 x축에 수선의 발을 내려 삼각형을 만든 후 삼각비를 구하는 것이다.

예를 들어 $\cos\frac{2\pi}{3}$의 값을 구한다고 하자.

동경을 좌표평면 위에 표시하면 아래와 같다.



여기에서 x축에 수선의 발을 내려서 삼각형을 만들면 아래와 같다.

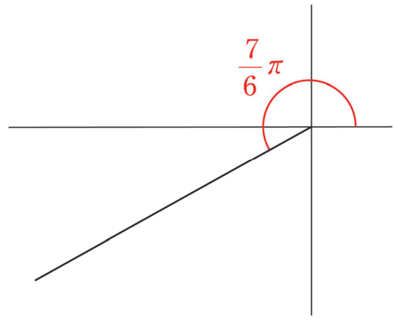


x축에 수선의 발을 내려 만든 삼각형에서 코사인값을 구하면 $\frac{1}{2}$이다. 하지만 $\frac{2\pi}{3}$**은 제2 사분면 위의 동경 이므로 '사인값'만 양수이다. 코사인값은 음수이므로 아까 구한 $\frac{1}{2}$에다가 마이너스(−)만 붙여주자.**

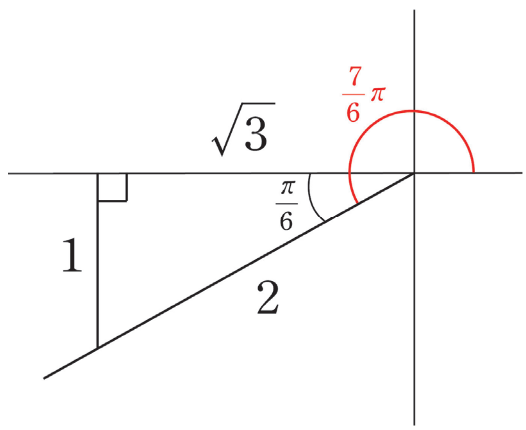
$\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$이다.

체화를 위해 이번엔 $\tan\frac{7\pi}{6}$를 같은 방법으로 구해보자.

동경을 좌표평면 위에 표시하면 아래와 같다.



여기에서 x축에 수선의 발을 내려서 삼각형을 만들면 아래와 같다.



x축에 수선의 발을 내려 만든 삼각형에서 탄젠트값을 구하면 $\frac{1}{\sqrt{3}}$이다.

$\frac{7\pi}{6}$은 제3 사분면 위의 동경이므로 '탄젠트값'만 양수이다.

탄젠트값은 양수이므로 아까 구한 $\frac{1}{\sqrt{3}}$에다가 플러스(+)만 붙여주자. $\tan\frac{7\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$이다.

3줄로 요약하면 아래와 같다.

1. x축에 수선을 내려 삼각형을 만든다
2. 만든 삼각형에서 필요한 사인, 코사인, 탄젠트 값을 구한다.
3. 올싸탄코로 부호를 정한다.

5. 삼각함수 호환

sin, cos과 tan, cot 호환이 자유자재로 되어야 삼각함수에서 실수를 줄일 수 있다.

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=+\cos\theta$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=+\sin\theta$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=+\cot\theta$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=+\cos\theta$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$
$\sin(\pi-\theta)=+\sin\theta$ $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$	$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi+\theta)=+\tan\theta$
$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\theta$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\sin\theta$ $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=+\cot\theta$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\cos\theta$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=+\sin\theta$ $\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$
$\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta$ $\cos(2\pi-\theta)=+\cos\theta$ $\tan(2\pi-\theta)=-\tan\theta$	$\sin(2\pi+\theta)=+\sin\theta$ $\cos(2\pi+\theta)=+\cos\theta$ $\tan(2\pi+\theta)=+\tan\theta$

위와 같은 표를 교과서에서 보고 무작정 외우는 안타까운 경우가 많다.
이를 굳이 외우지 않아도 실수 없이 sin, cos과 tan, cot 호환하는 방법을 알려주도록 하겠다.

※ $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$이다. cot 표현은 수학 1에서 등장하지 않으나 표현이 간결하여 본 교재에서는 쓰도록 하겠다.

소개할 $\frac{n}{2}\pi \pm \theta$에서 sin, cos과 tan, cot 호환하는 방법은 흔히 **'예각 가정법'**이라고 부르는 방법이다.

먼저, $\frac{n}{2}\pi \pm \theta$에서 n**이 짝수이면** sin은 sin, cos은 cos, tan는 tan**로 두고,**
n**이 홀수이면** sin은 cos, cos은 sin, tan는 cot**로 둔다.** (n은 정수)

두 번째로, $\frac{n}{2}\pi \pm \theta$**에서** θ**를 항상 예각으로 간주하고 호환을 한다. (**θ**가 실제로는 둔각이든, 어떤 각이든)**
$\frac{n}{2}\pi \pm \theta$**를 나타내는 동경이 제 몇 사분면에 존재하는지 파악한 후, '호환하기 전 원래 삼각함수'의 부호**가 양이면 +를, 음이면 −를 **'호환 후 삼각함수' 앞에 붙여주자.** (n은 정수)

빠른 이해를 돕기 위해 몇몇 예들을 살펴보자.

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$를 호환할 때를 살펴보자. $\frac{n}{2}\pi+\theta$**에서** n**이 홀수이므로** cos을 sin**으로 바꿔주자.**

θ를 예각으로 가정하면, $\frac{\pi}{2}+\theta$**를 나타내는 동경은 제2 사분면에 있다.**

제2 사분면에서는 **'호환하기 전 원래 삼각함수** $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$**의** cos**'의 부호가 음이다.**

따라서 **'호환 후 삼각함수** $\sin\theta$**' 앞에 −를 붙여주자.** 종합하면 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$이다.

$\sin(\pi-\theta)$를 호환할 때를 살펴보자. $\frac{n}{2}\pi-\theta$**에서** n**이 짝수이므로** sin을 sin**으로 두자.**

θ를 예각으로 가정하면, $\pi-\theta$**를 나타내는 동경은 제2 사분면에 있다.**
제2 사분면에서는 **'호환하기 전 원래 삼각함수** $\sin(\pi-\theta)$**의** sin**'의 부호가 양이다.**
따라서 **'호환 후 삼각함수** $\sin\theta$**' 앞에 +를 붙여주자.** 종합하면 $\sin(\pi-\theta)=+\sin\theta$이다.

$\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)$를 호환할 때를 살펴보자. $\frac{n}{2}\pi+\theta$**에서** n**이 홀수이므로** tan를 cot**로 바꿔주자.**

θ를 예각으로 가정하면, $\frac{3\pi}{2}+\theta$**를 나타내는 동경은 제4 사분면에 있다.**

제4 사분면에서는 **'호환하기 전 원래 삼각함수** $\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)$**의** tan**'의 부호가 음이다.**

따라서 **'호환 후 삼각함수** $\cot\theta$**' 앞에 −를 붙여주자.** 종합하면 $\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$이다.

$\cos(2\pi-\theta)$를 호환할 때를 살펴보자. $\frac{n}{2}\pi-\theta$**에서** n**이 짝수이므로** cos을 cos**으로 바꿔주자.**

θ를 예각으로 가정하면, $2\pi-\theta$**를 나타내는 동경은 제4 사분면에 있다.**
제4 사분면에서는 **'호환하기 전 원래 삼각함수** $\cos(2\pi-\theta)$**의** cos**'의 부호가 양이다.**
따라서 **'호환 후 삼각함수** $\cos\theta$**' 앞에 +를 붙여주자.** 종합하면 $\cos(2\pi-\theta)=+\cos\theta$이다.

θ에 구체적인 숫자가 있을 때도 살펴보자.

$\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right)$를 계산할 때를 살펴보자.

$\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)$로 바라본다 하자. $\cos\left(\frac{n}{2}\pi-\theta\right)$꼴에서 **$n$이 짝수이므로 $\cos$을 $\cos$으로 두자.**

$\theta=\frac{\pi}{3}$로 두고 θ**를 예각으로 가정하면 (θ는 실제로도 예각이다), $2\pi-\theta$를 나타내는 동경은 제4 사분면에 있다.** 제4 사분면에서는 **'호환하기 전 원래 삼각함수 $\cos(2\pi-\theta)$의 $\cos$'의 부호가 양이다.** 따라서 **'호환 후 삼각함수 $\cos\theta$' 앞에 $+$를 붙여주자.** 종합하면 $\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$이다.

이번에는 $\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right)$를 $\cos\left(\pi+\frac{2\pi}{3}\right)$로 바라본다 하자. $\cos\left(\frac{n}{2}\pi+\theta\right)$꼴에서 **$n$이 짝수이므로 $\cos$을 $\cos$으로 두자.** $\theta=\frac{2\pi}{3}$로 두고 θ**를 예각으로 가정하면 (θ는 실제로는 예각이 아니다), $\pi+\theta$를 나타내는 동경은 제3 사분면에 있다.** 제3 사분면에서는 **'호환하기 전 원래 삼각함수 $\cos(\pi+\theta)$의 $\cos$'의 부호가 음이다.**
따라서 **'호환 후 삼각함수 $\cos\theta$' 앞에 $-$를 붙여주자.** 종합하면 $\cos\left(\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$이다.

이를 통해 예각 가정법이 잘 통함을 알 수 있다.

$\sin\left(\frac{7}{6}\pi\right)$를 계산할 때를 살펴보자. $\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)$로 바라본다 하자.
$\sin\left(\frac{n}{2}\pi+\theta\right)$꼴에서 **$n$이 짝수이므로 $\sin$을 $\sin$으로 두자.** $\theta=\frac{\pi}{6}$로 두고 θ**를 예각으로 가정하면 (θ는 실제로도 예각이다), $\pi+\theta$를 나타내는 동경은 제3 사분면에 있다.** 제3 사분면에서는 **'호환하기 전 원래 삼각함수 $\sin(\pi+\theta)$의 $\sin$'의 부호가 음이다.** 따라서 **'호환 후 삼각함수 $\sin\theta$' 앞에 $-$를 붙여주자.**
종합하면 $\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$이다.

$\sin\left(\frac{7}{6}\pi\right)$를 계산할 때를 살펴보자. $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{3}\right)$로 바라본다 하자.
$\sin\left(\frac{n}{2}\pi-\theta\right)$꼴에서 **$n$이 홀수이므로 $\sin$을 $\cos$으로 바꿔주자.** $\theta=\frac{\pi}{3}$로 두고 θ**를 예각으로 가정하면 (θ는 실제로도 예각이다), $\frac{3}{2}\pi-\theta$를 나타내는 동경은 제3 사분면에 있다.** 제3 사분면에서는 **'호환하기 전 원래 삼각함수 $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)$의 $\sin$'의 부호가 음이다.** 따라서 **'호환 후 삼각함수 $\cos\theta$' 앞에 $-$를 붙여주자.**
종합하면 $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$이다.

삼각함수 호환 공식은 α가 예각이 아니더라도 성립한다고 배웠다. 정말 가능한지 확인해보자.

예를 들어 α가 예각일 때, $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$를 간단하게 바꾼다고 하자. $\frac{3\pi}{2}-\alpha$는 제3 사분면에 있다.

이때 $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)<0, \sin\alpha>0$이므로 $-\sin\alpha$로 간단히 바꿀 수 있다.

다만, **α가 꼭 예각이 아니여도 $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$를 $-\sin\alpha$로 바꿀 수 있다고 배웠다.** 진짜로 가능할까?

궁금하니 직접 해보자.

$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$일 때, $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$를 간단하게 바꾼다고 하자. $\frac{3\pi}{2}-\alpha$는 제2 사분면에 있다.

이때 $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)<0, \sin\alpha>0$이므로 $-\sin\alpha$로 간단히 바꿀 수 있다.

$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$일 때, $\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)$를 간단하게 바꾼다고 하자. $\frac{3\pi}{2}-\alpha$는 제1 사분면에 있다.

이때 $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)>0, \sin\alpha<0$이므로 $-\sin\alpha$로 간단히 바꿀 수 있다.

$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$일 때, $\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)$를 간단하게 바꾼다고 하자. $\frac{3\pi}{2}-\alpha$는 제4 사분면에 있다.

이때 $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)>0, \sin\alpha<0$이므로 $-\sin\alpha$로 간단히 바꿀 수 있다.

이처럼 **우리가 그동안 알고 있는 삼각함수 호환 공식은 α가 예각이 아니더라도 성립함을 보였다.** 힘들게 α 범위를 열심히 나누는 수고를 안 해도 된다.

가끔 이런 의문점이 들 때도 있다. $\sin(x+\alpha)$를 $\cos$**에 관련된 식으로 바꿔주고 싶을 때**
$\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(x+\alpha)\right\}$**인가? 아니면 x 대신 $\frac{\pi}{2}-x$을 대입한 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x+\alpha\right)$인가?**

교과서에는 $\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ 밖에 나와 있지 않아 헷갈릴 수 있다.

하지만 결론적으로는 **$\sin(x+\alpha)=\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(x+\alpha)\right\}$이 맞다.** 삼각함수의 덧셈정리를 이용해 증명하는 게 제일 빠르나 수학 1에서 이를 배우지 않기에 x, α에 직접 각을 대입하여 확인하는 절차를 꼭 거치자.
시험장에선 헷갈리지 말고 바로 써먹을 수 있으면 좋겠다.

예제(1) 19학년도 9월 평가원 가형 14번

실수 k에 대하여 함수

$$f(x)=\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k$$

의 최댓값은 3, 최솟값은 m이다. $k+m$의 값은? [4점]

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

1. $f(x)=\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k$를 관찰하면 $\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)$, $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$의 **괄호 안이 $\frac{\pi}{2}$ 차이**가 난다는 것을 알 수 있다. 따라서 **삼각함수 호환**으로 쉽게 바꿀 수 있다.

$\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)=\cos^2\left\{-\frac{\pi}{2}+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right\}=\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$와 같이 바꿀 수 있다.

2. $\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1-\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$이므로 $f(x)=-\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k+1$로 바꿀 수 있다. $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$를 t**로 치환**하면 $f(x)=-t^2-t+k+1\ (-1\le t\le 1)$이다.

$f(x)$의 최댓값, 최솟값을 구해야 하기에 t의 범위 설정을 잊으면 절대 안 된다.

$f(x)$는 $t=-\frac{1}{2}$일 때 최댓값을 가지며 $t=1$일 때 최솟값을 갖는다.

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=3$이므로 $k+\frac{5}{4}=3,\ k=\frac{7}{4}$이다. 따라서 $f(1)=k-1$이므로 $m=\frac{3}{4}$이다.

$k+m=\frac{7}{4}+\frac{3}{4}=\frac{5}{2}$이므로 **답은 ③!!**

comment

2019 수능 완성 연계이고 많은 학생들이 무작정 미분을 하려다가 시간을 뺏기고 틀린 문제이다. EBS를 덜 공부했다기보다는 $\cos(x-\alpha)$**꼴에서** $\alpha=\frac{2n+1}{2}\pi\ (n\text{은 정수})$**인 것만 자주 봐왔을 것이다. 개념이 탄탄하면** $\alpha\ne\frac{2n+1}{2}\pi\ (n\text{은 정수})$**이어도 문제없을 듯하지만** 그렇지 않다면 EBS를 꼭 봐서 시험장에서 후회하는 일이 없도록 하자.

Chapter 4를 성실히 공부했다면 합성함수 그래프를 그리려는 사람이 분명 있었을 것이다. 그려보는 것도 좋지만 이 문제에서는 $f(x)$의 최대, 최소 정도만 확인하는 것이기에 효율이 많이 떨어진다.

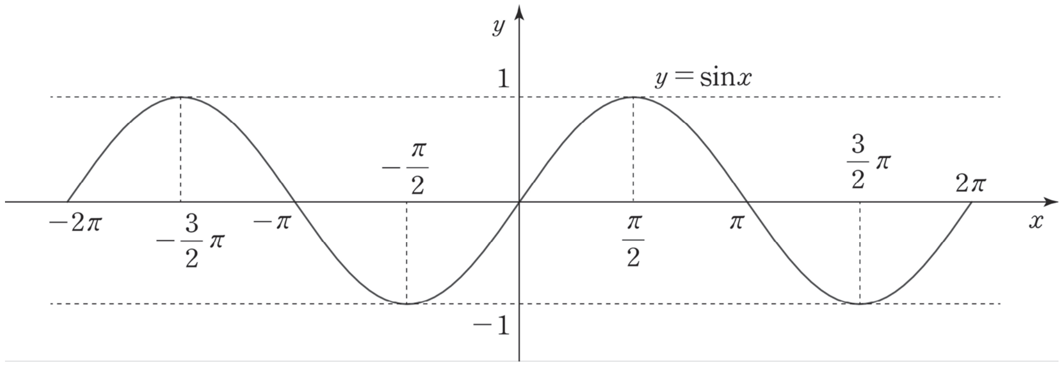
$f(x)$의 극점, 미분가능성, 다른 그래프와의 교점 등등을 확인할 때는 $f(x)$를 직접 그려보는 것이 직관적으로 문제 풀기에 편하기에 매우 권장하지만 $f(x)$**의 최대, 최소 정도만 확인할 때는** $f(x)$**가 정의되는** x**의 범위에서 양 끝값과 극점 정도만 수식으로만 구해도 충분하다.**

◆ 6. 삼각함수의 그래프

(1) 기본적인 삼각함수 그래프

기본적인 삼각함수의 그래프는 아래와 같다.

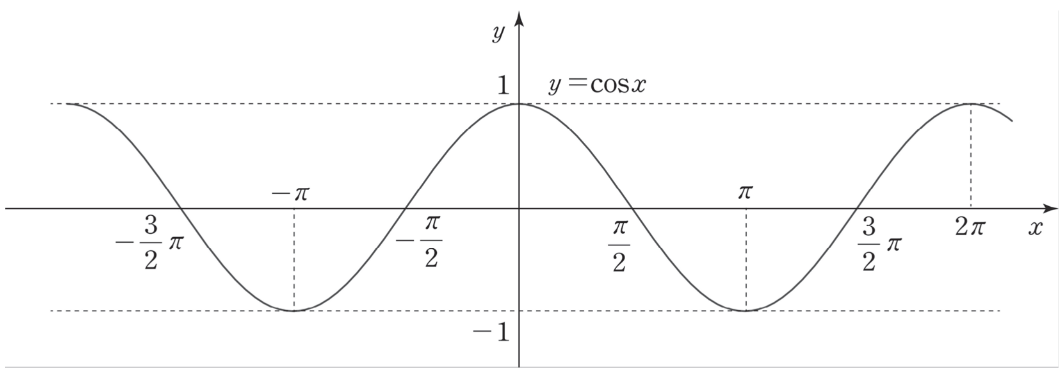
$\langle y=\sin x \rangle$



정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y|-1 \le y \le 1\}$이다. 최댓값은 1, 최솟값은 −1이다.
모든 실수 x에 대하여 $\sin(2n\pi+x)=\sin x$ (n은 정수)이므로 주기가 2π인 주기함수이다.
모든 실수 x에 대하여 $\sin x=-\sin(-x)$를 만족하므로 기함수이다.
이뿐만 아니라 **점 $(n\pi, 0)$에 대해 대칭이고, 직선 $x=\frac{2n-1}{2}\pi$에 대해서도 대칭**이다. (n은 정수)

$y=\sin x$**의 그래프는** $y=\cos x$**의 그래프를** x**축으로** $\frac{\pi}{2}$**만큼 평행이동한 그래프이다.**

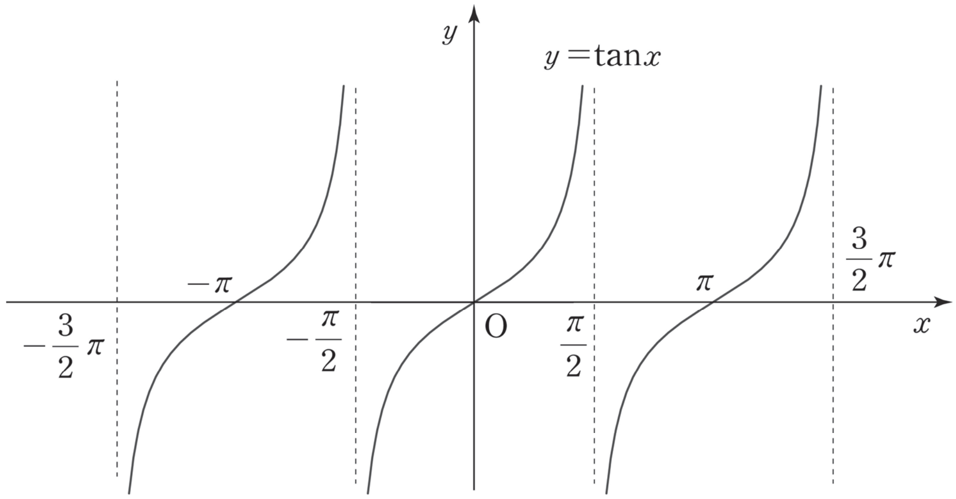
$\langle y=\cos x \rangle$



정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y|-1 \le y \le 1\}$이다. 최댓값은 1, 최솟값은 −1이다.
모든 실수 x에 대하여 $\cos(2n\pi+x)=\cos x$ (n은 정수)이므로 주기가 2π인 주기함수이다.
모든 실수 x에 대하여 $\cos x=\cos(-x)$를 만족하므로 우함수이다.
이뿐만 아니라 **직선 $x=n\pi$에 대해서도 대칭이고, 점 $\left(\frac{2n-1}{2}\pi, 0\right)$에 대해서도 대칭**이다. ($n$은 정수)

$y=\cos x$**의 그래프는** $y=\sin x$**의 그래프를** x**축으로** $-\frac{\pi}{2}$**만큼 평행이동한 그래프이다.**

$\langle y = \tan x \rangle$



정의역은 $x \neq \frac{(2n-1)\pi}{2}$ **(**n**은 정수)인 실수 전체의 집합이고,** 치역은 실수 전체의 집합이다.

최댓값과 최솟값을 갖지 않는다. **점근선** $x = \frac{(2n-1)\pi}{2}$ **(**n**은 정수)을 지닌다.**

※ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$에서 $\cos x = 0$을 만족하는 x에서 $\tan x$가 정의되지 않는다는 것을 확인할 수 있다.

모든 실수 x**에 대하여** $\tan(n\pi + x) = \tan x$ **(**n**은 정수)이므로 주기가** π**인 주기함수이다.**
모든 실수 x에 대하여 $\tan x = -\tan(-x)$를 만족하므로 기함수이다.
이뿐만 아니라 **점** $(n\pi, 0)$**에 대해 대칭**이다. (n은 정수)

(2) 여러 가지 삼각함수 그래프

최대, 최소의 변화

$y=a\sin x$, $y=a\cos x$**의 최솟값과 최댓값은** $-|a|$, $|a|$**이다.**

$y=a\tan x$**의 최솟값과 최댓값은 존재하지 않는다.**

주기의 변화

$y=\sin bx$, $y=\cos bx$**의 주기는 모두** $\dfrac{2\pi}{|b|}$**이다.**

$y=\tan bx$**의 주기는** $\dfrac{\pi}{|b|}$**이다.**

평행이동

$y=\sin(bx+c)+d$를 예로 들어보자.

$y=\sin(bx+c)+d$**는** $y=\sin bx$**의 그래프를** x**축으로** $-\dfrac{c}{b}$**만큼,** y**축으로** d**만큼 평행이동한 것이다.**

※ $y=\sin(bx+c)$는 $y=\sin bx$의 그래프를 x축으로 $-\dfrac{c}{b}$만큼이 아닌 $-c$만큼 평행이동한 것이라고 착각하는 경우가 많다. 하지만 그렇지 않다. $y=\sin(bx+c)$를 $y=\sin\left(b\left(x+\dfrac{c}{b}\right)\right)$로 바꾸어 보면 금방 이해할 수 있다.

최대와 최소의 변화, 주기의 변화, 평행이동 종합

(a ~ d는 상수, $a>0$, $b\neq 0$)	$y=a\sin(bx+c)+d$	$y=a\cos(bx+c)+d$	$y=a\tan(bx+c)+d$
주기	$\dfrac{2\pi}{\lvert b\rvert}$	$\dfrac{2\pi}{\lvert b\rvert}$	$\dfrac{\pi}{\lvert b\rvert}$
정의역과 치역	정의역 : 실수 전체의 집합 치역 : $\{y\mid -a\leq y\leq a\}$	정의역 : 실수 전체의 집합 치역 : $\{y\mid -a\leq y\leq a\}$	정의역 : $\left\{x\,\middle\vert\, x\neq \dfrac{n\pi}{2b}-\dfrac{c}{b}\right\}$ 치역 : 실수 전체의 집합
최댓값과 최솟값	최댓값 : a 최솟값 : $-a$	최댓값 : a 최솟값 : $-a$	최댓값과 최솟값이 존재하지 않는다.
x축, y축으로 각각 $\dfrac{c}{b}$, $-d$만큼 평행이동	$y=a\sin bx$	$y=a\cos bx$	$y=a\tan bx$

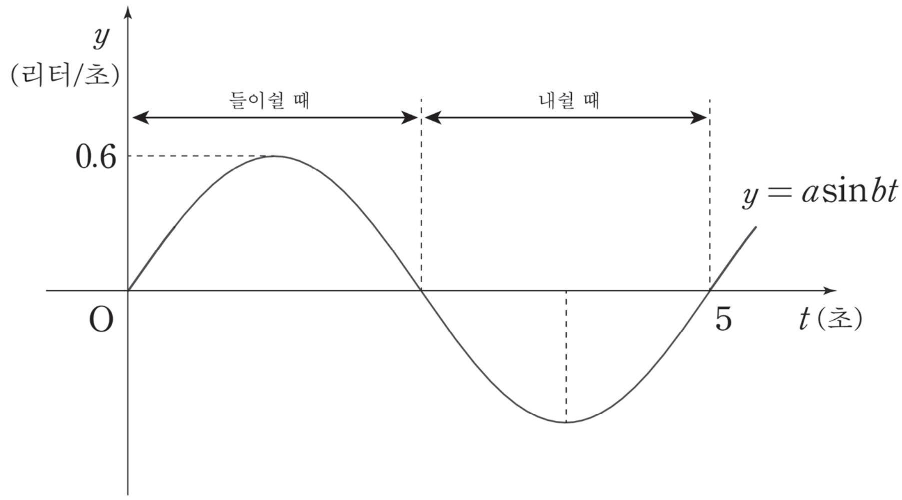
삼각함수 일반형의 주기, 정의역과 치역, 최댓값과 최솟값, 평행이동은 위와 같다.

이를 바탕으로 $y=a\sin(bx+c)+d$의 그래프를 그리는 방법은 다음과 같다. 최댓값과 최솟값, 주기를 고려하여 $y=a\sin(bx)$를 그린 후, x축으로 $-\dfrac{c}{b}$ 만큼, y축으로 d만큼 평행이동 시켜주면 된다.

※ 표를 단순히 외우려 하지 말고 문제를 풀면서 자연스레 숙지 되는 느낌으로 공부하자.

예제(2) 04학년도 수능 인문계 23번

다음 그래프는 어떤 사람이 정상적인 상태에 있을 때 시각에 따라 호흡기에 유입되는 공기의 흡입률(리터/초)을 나타낸 것이다. 숨을 들이쉬기 시작하여 t 초일 때 호흡기에 유입되는 공기의 흡입률을 y 라 하면, 함수 $y = a\sin bt$ (a, b 는 양수)로 나타낼 수 있다. 이때, y 의 값은 숨을 들이쉴 때는 양수, 내쉴 때는 음수가 된다.



이 함수의 주기가 5초이고, 최대 흡입률이 0.6(리터/초)일 때, 숨을 들이쉬기 시작한 시각으로부터 처음으로 흡입률이 -0.3(리터/초)이 되는 데 걸리는 시간은? [3점]

① $\frac{35}{12}$초 ② $\frac{37}{12}$초 ③ $\frac{30}{11}$초 ④ $\frac{31}{11}$초 ⑤ $\frac{35}{31}$초

1. 함수 $y = a\sin bt$의 주기가 5이므로 $\frac{2\pi}{b} = 5$이다. 따라서 $b = \frac{2\pi}{5}$이다.
   최대 흡입률이 0.6(리터/초)이므로 $a = 0.6$이다.

2. 함수 $y = 0.6\sin\frac{2\pi}{5}t = -0.3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 t중에 가장 작은 값을 구하자.
   $\sin\frac{2\pi}{5}t = -\frac{1}{2}$에서 $\frac{2\pi}{5}t = \frac{7\pi}{6}$이다. 따라서 $t = \frac{35}{12}$이다. **답은 ①!!**

예제(3) 18학년도 사관 가형 6번

함수 $f(x)=a\sin bx+c$ ($a>0$, $b>0$)의 최댓값은 4, 최솟값은 -2이다. 모든 실수 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$를 만족시키는 양수 p의 최솟값이 π일 때, abc의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.) [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

함수 $f(x)$의 최댓값이 4, 최솟값이 -2이므로 $a+c=4$, $-a+c=-2$에서 $a=3$, $c=1$이다.

따라서 $f(x)=3\sin bx+1$이고 주기는 $\frac{2\pi}{b}=\pi$이므로 $b=2$이다. $abc=6$이다. **답은 ①!!**

예제(4) 19년 6월 교육청 고2 나형 27번

두 함수 $f(x)=\log_3 x+2$, $g(x)=3\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$가 있다. $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$에서 정의된 합성함수 $(f \circ g)(x)$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. [4점]

1. $g(x)=t$라 하자. $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$에서 $x=0$일 때 최솟값 $t=\sqrt{3}$을 갖고

$x=\frac{\pi}{6}$일 때 최댓값 $t=3\sqrt{3}$을 갖는다.

2. $(f \circ g)(x)$의 최댓값, 최솟값을 구해야 하기에 t의 범위 설정을 잊으면 절대 안 된다.

$f(t)=\log_3 t+2$ $(\sqrt{3} \le t \le 3\sqrt{3})$**에서** $f(t)$**는 증가함수이므로**

$M=f(3\sqrt{3})=\log_3 3\sqrt{3}+2=\frac{3}{2}+2=\frac{7}{2}$, $m=f(\sqrt{3})=\log_3\sqrt{3}+2=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$이다.

$M+m=6$이고 **답은 6!!**

예제(5) 14학년도 경찰대 7번

함수 $y=a\cos^2 x+a\sin x+b$의 최댓값이 10이고 최솟값이 1일 때, 실수 a, b의 곱 ab의 값은 p 또는 q이다. $p+q$의 값은? [4점]

① -4　　② -2　　③ 2　　④ 4　　⑤ 6

1. $\cos^2 x=1-\sin^2 x$이므로 $y=a\cos^2 x+a\sin x+b=a(1-\sin^2 x)+a\sin x+b$이다.
   정리하면 $y=-a\sin^2 x+a\sin x+a+b$이므로 $\sin x=t$로 치환하면
   $y=-at^2+at+a+b=-a\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}a+b\ (-1\le t\le 1)$ 이다.
   $y=a\cos^2 x+a\sin x+b$의 최댓값, 최솟값을 구해야 하기에 t의 범위 설정을 잊으면 절대 안 된다.

2. a의 범위에 따라 값을 구해보자.

   (1) $a>0$: 최댓값은 $t=\frac{1}{2}$일 때 $\frac{5}{4}a+b=10$, 최솟값은 $t=-1$일 때, $-a+b=1$이다.
   따라서 $a=4$, $b=5$이므로 $ab=20$이다.

   (2) $a<0$: 최댓값은 $t=-1$일 때 $-a+b=10$, 최솟값은 $t=\frac{1}{2}$일 때 $\frac{5}{4}a+b=1$이다.
   따라서 $a=-4$, $b=6$이므로 $ab=-24$이다.

   (1), (2)에 의해 $p+q=20-24=-4$이다. **답은 ①!!**

◆ 7. 삼각함수 대칭성 활용

$y=\sin x$, $y=\tan x$는 기함수이고 $y=\cos x$는 우함수이다.
$y=\sin x$, $y=\cos x$는 주기가 2π이고 $y=\tan x$는 주기가 π이다.
$y=\sin x, y=\cos x$는 점근선이 없으나 $y=\tan x$의 경우 특이하게 $x=\pm\frac{2n+1}{2}\pi\,(n$은 정수$)$과 같은 점근선이 존재한다.

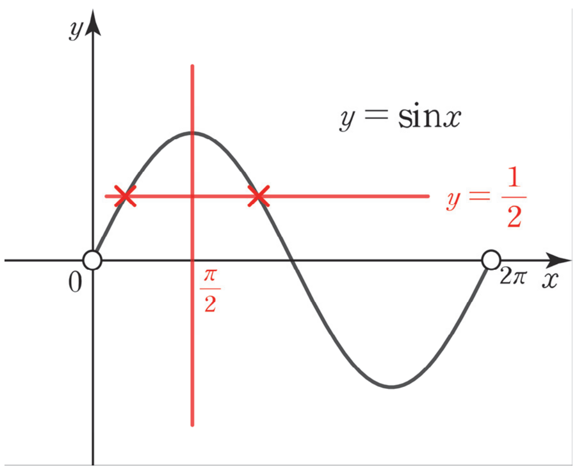
삼각함수의 대칭성, 주기성, 점근선은 그래프를 그리는 것뿐만 아니라 계산을 줄여주는 데에도 유용하다.

예를 들어 $0<x<2\pi$일 때, 방정식 $\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)\left(\cos x-\frac{1}{3}\right)=0$의 모든 실근의 합을 구한다고 해보자.
평가원 3점짜리로 주로 나오는 문제이다.

$\sin x=\frac{1}{2}, \cos x=\frac{1}{3}$를 동시에 만족하는 x는 존재하지 않는다.

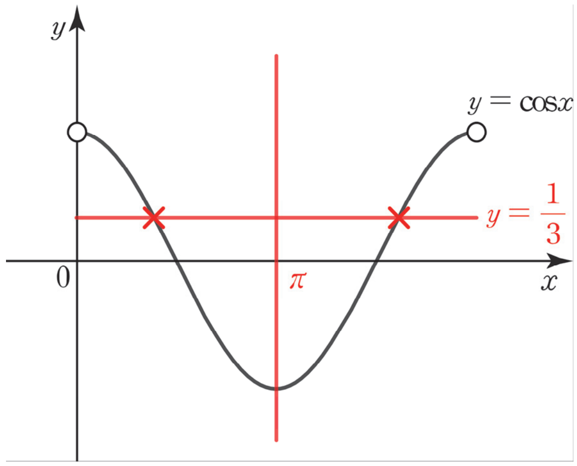
$0<x<2\pi$일 때, $\sin x=\frac{1}{2}$를 만족하는 x와 $\cos x=\frac{1}{3}$를 만족하는 x들의 값을 '직접' 구하려고 했는가?
그래프를 그려 대칭성을 이용하면 계산이 훨씬 쉬워지고 실수도 안 한다.

$0<x<2\pi$에서 $y=\sin x$와 $y=\frac{1}{2}$을 그리면 다음과 같다. $x=0$, $x=2\pi$를 포함하지 않으므로
$x=0, x=2\pi$ **부분은 꼭 빈 동그라미로 표시**하자.



$\sin x=\frac{1}{2}$ 해는 $0<x<\pi$에서 2개가 생긴다. $0<x<\pi$에서 $y=\sin x$는 $x=\frac{\pi}{2}$대칭이기에 2개의 해의 합은 π라는 걸 쉽게 알 수 있다. 와닿지 않으면 두 개의 해를 $\frac{\pi}{2}-\alpha, \frac{\pi}{2}+\alpha$로 두고 더해도 된다.

$0 < x < 2\pi$에서 $y = \cos x$와 $y = \dfrac{1}{3}$을 그리면 다음과 같다. $x = 0, x = 2\pi$를 포함하지 않으므로 $x = 0, x = 2\pi$ **부분은 꼭 빈 동그라미로 표시**하자.



$\cos x = \dfrac{1}{3}$ 해는 $0 < x < 2\pi$에서 2개가 생긴다. $0 < x < 2\pi$에서 $y = \cos x$는 $x = \pi$대칭이기에 2개의 해의 합은 2π라는 걸 쉽게 알 수 있다. 와닿지 않으면 두 개의 해를 $\pi - \beta, \pi + \beta$로 두고 더해도 된다.

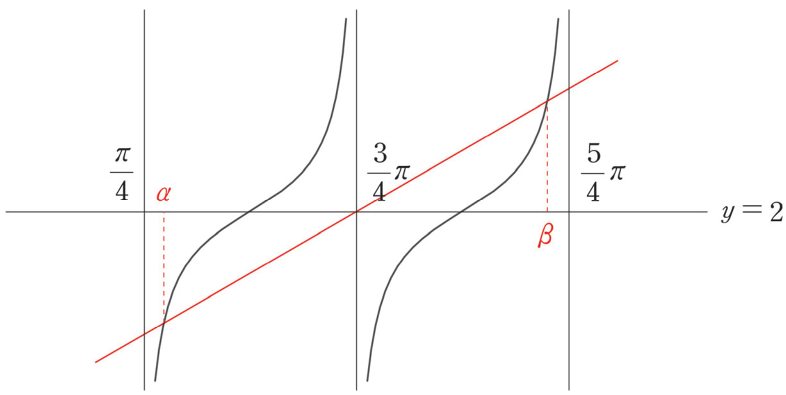
따라서 $0 < x < 2\pi$일 때, 방정식 $\left(\sin x - \dfrac{1}{2}\right)\left(\cos x - \dfrac{1}{3}\right) = 0$의 모든 실근의 합은 $\pi + 2\pi = 3\pi$이다.
앞으로 **삼각방정식이나 삼각부등식을 풀 때는 꼭 삼각함수의 그래프를 그려두고 풀자.**
시간도 단축되고 실수도 안 하는 방법이어서 일거양득이다.

삼각방정식의 경우, 해를 직접 구하여 더하기보다는 대칭성을 이용해 해의 합을 구하기가 쉽다.
삼각부등식의 경우, 시각적으로 범위를 확인할 수 있어 부등호 방향 실수가 적어진다.
덤으로 대칭성과 주기성 역시 확인하기 쉽다.

예제(6) 수능특강 변형

$\frac{\pi}{4} < x < \frac{5}{4}\pi$에서 함수 $y = \tan 2x + 2$의 그래프와 직선 $y = m\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) + 2\ (m > 0)$이 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha < \beta)$라 할 때, $\beta - \alpha = \frac{3}{4}\pi$이다. $3\pi m$의 값을 구하시오.

1. 함수 $y = \tan 2x + 2$의 그래프와 직선 $y = m\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) + 2$의 그래프를 그려보자.

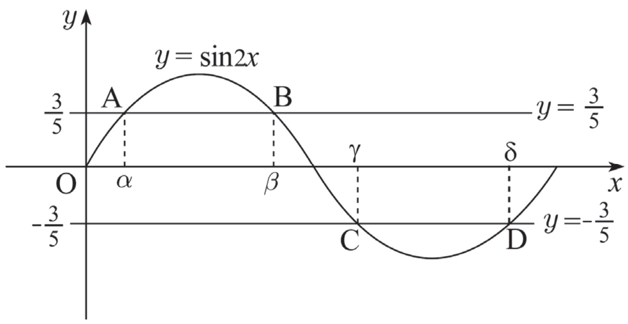


$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{3}{4}\pi$에서 $\alpha + \beta = \frac{3}{2}\pi$임을 알 수 있다. $\beta - \alpha = \frac{3}{4}\pi$이므로 $\alpha = \frac{3}{8}\pi$, $\beta = \frac{9}{8}\pi$이다.

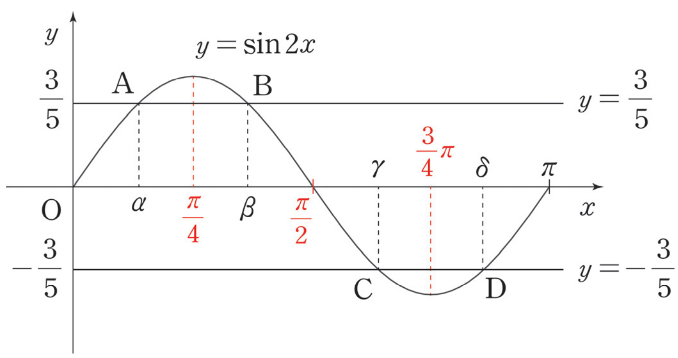
2. 직선 $y = m\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) + 2$가 점 $\left(\frac{9}{8}\pi, 3\right)$을 지나므로 $m \times \left(\frac{9}{8}\pi - \frac{3}{4}\pi\right) = 1$에서 $m = \frac{8}{3\pi}$이다.
따라서 $3\pi m = 8$이다. **답은 8!!**

예제(7) 09년 3월 교육청 고2 13번

그림과 같이 함수 $y=\sin 2x\ (0 \le x \le \pi)$의 그래프가 직선 $y=\frac{3}{5}$과 두 점 A, B에서 만나고, 직선 $y=-\frac{3}{5}$과 두 점 C, D에서 만난다. 네 점 A, B, C, D의 x좌표를 각각 α, β, γ, δ라 할 때, $\alpha+2\beta+2\gamma+\delta$의 값은? [4점]



① $\frac{9}{4}\pi$　　② $\frac{5}{2}\pi$　　③ 3π　　④ $\frac{7}{2}\pi$　　⑤ 4π



$y=\sin 2x$의 그래프에 대칭성과 주기성에 집중하자.

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{4}$이므로 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$이다. 마찬가지로 $\frac{\gamma+\delta}{2}=\frac{3\pi}{4}$이므로 $\gamma+\delta=\frac{3\pi}{2}$이다.

또, $\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}$이므로 $\beta+\gamma=\pi$이다.

따라서 $\alpha+2\beta+2\gamma+\delta=(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta)+(\beta+\gamma)=\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}+\pi=3\pi$이다. **답은 ③!!**

※ 다른 풀이

$y=\sin(2x)$가 점 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$에 대하여 대칭이므로 $\alpha+\delta=\pi$, $\beta+\gamma=\pi$이다.

예제(8) 19년 6월 교육청 고2 나형 21번

음이 아닌 세 정수 a, b, n에 대하여

$$(a^2+b^2+2ab-4)\cos\frac{n}{4}\pi+(b^2+ab+2)\tan\frac{2n+1}{4}\pi=0$$

일 때, $a+b+\sin^2\frac{n}{8}\pi$의 값은? (단, $a \geq b$) [4점]

① 4 ② $\frac{19}{4}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{25}{4}$ ⑤ 7

1. $\cos\frac{n}{4}\pi$의 계수와 $\tan\frac{2n+1}{4}\pi$의 계수를 살펴보자.

$a^2+b^2+2ab-4$**는 정수이고,** b^2+ab+2 **또한 정수이다.**

a**와** b**는 음이 아닌 정수이므로** $b^2+ab+2\ge 2$**이다.**

2. n에 숫자를 대입하여 $\cos\frac{n}{4}\pi$과 $\tan\frac{2n+1}{4}\pi$을 구해보면 다음 표와 같다.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$\cos\frac{n}{4}\pi$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\tan\frac{2n+1}{4}\pi$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1

$\tan\frac{2n+1}{4}\pi$**는 항상 정수이다.**

$\cos\frac{n}{4}\pi=0$이면 $(b^2+ab+2)\tan\frac{2n+1}{4}\pi=b^2+ab+2=0$이어야 한다.

$b^2+ab+2\ge 2$이므로 성립하지 않는다.

마찬가지로, $\cos\frac{n}{4}\pi$가 무리수이면 두 수의 계수가 모두 0을 만족해야 한다.

$b^2+ab+2\ge 2$**이므로** $\cos\frac{n}{4}\pi$**는 무리수가 아니다.**

이제 남은 케이스를 나눠서 계산해보자.

(1) $\cos\frac{n}{4}\pi=\tan\frac{2n+1}{4}\pi=1$: $a^2+b^2+2ab-4+b^2+ab+2=0$에서

$(a+b)(a+2b)=2$ 이다. a와 b는 음이 아닌 정수이므로

$a+b=1$, $a+2b=2$ or $a+b=2$, $a+2b=1$을 만족해야 한다.

$a+b=1$, $a+2b=2$ 이면 $a=3$, $b=-1$이므로 $b\ge 0$인 것에 모순이고,

$a+b=2$, $a+2b=1$ 이면 $a=0$, $b=1$이므로 $a\ge b$인 것에 모순이다.

(2) $\cos\frac{n}{4}\pi=-1$, $\tan\frac{2n+1}{4}\pi=1$:

$-a^2-b^2-2ab+4+b^2+ab+2=-a^2-ab+6=0$ 에서 $a(a+b)=6$이다.

a와 b는 음이 아닌 정수이므로

$a=1$, $a+b=6$ 또는 $a=2$, $a+b=3$을 만족해야 한다.

$a=1$, $a+b=6$ 이면 $a=1$, $b=5$이므로 $a\ge b$인 것에 모순이다.

$a=2$, $a+b=3$ 이면 $a=2$, $b=1$이므로 주어진 조건을 모두 만족한다.

3. $n=4$일 때 $\cos\frac{n}{4}\pi=-1$, $\tan\frac{2n+1}{4}\pi=1$ 를 만족한다.

따라서 $a+b+\sin^2\frac{n}{8}\pi=2+1+\sin^2\frac{\pi}{2}=3+1=4$이다. **답은 ①!!**

예제(9) 13년 3월 교육청 고2 A형 21번

함수 $f(x)$가 다음 세 조건을 만족시킨다.

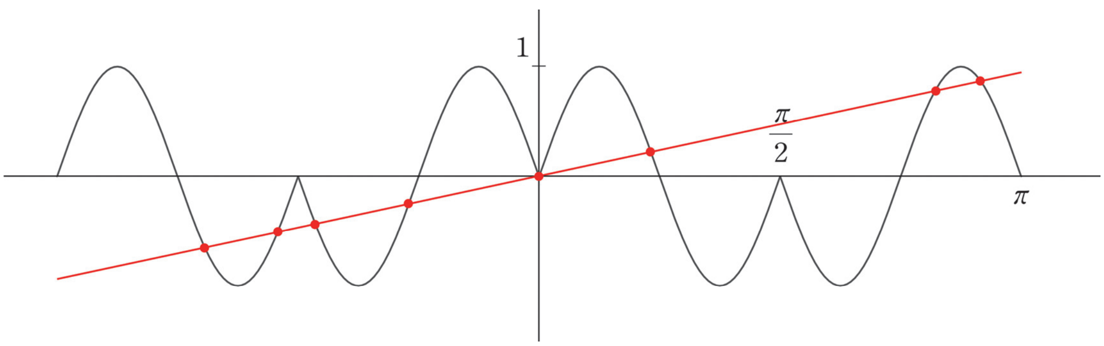
(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+\pi)=f(x)$이다.

(나) $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$일 때, $f(x)=\sin 4x$

(다) $\frac{\pi}{2} < x \le \pi$일 때, $f(x)=-\sin 4x$

이때 함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{\pi}$가 만나는 점의 개수는? [4점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8



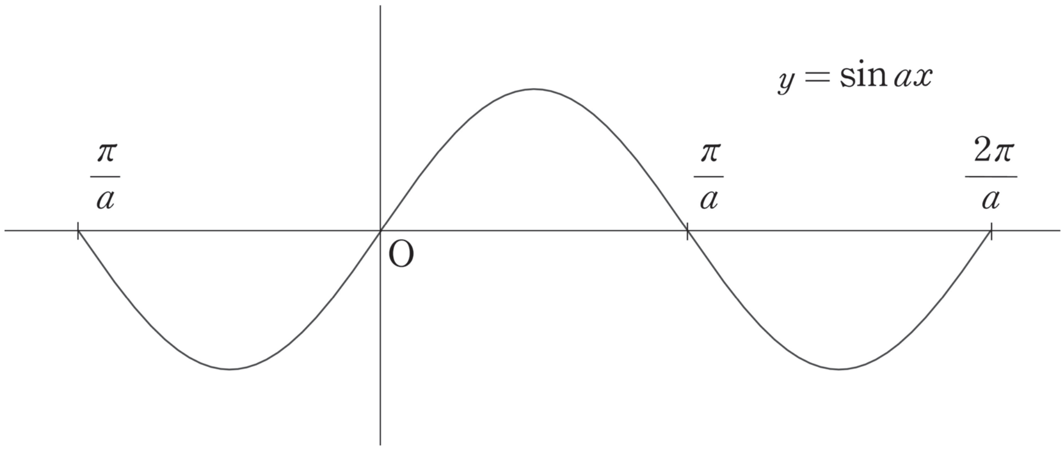
주어진 조건에 맞춰 $y=f(x)$를 그리면 **함수 $f(x)$는 주기가 π이고, 우함수이다.**
교점의 개수는 8이다. **답은 ⑤!!**

※ $f(x)$를 기함수라 착각하고 교점의 개수를 $3\times2+1=7$이라 하는 불상사가 없도록 주의하자.

예제(10) 20년 3월 교육청 가형 28번

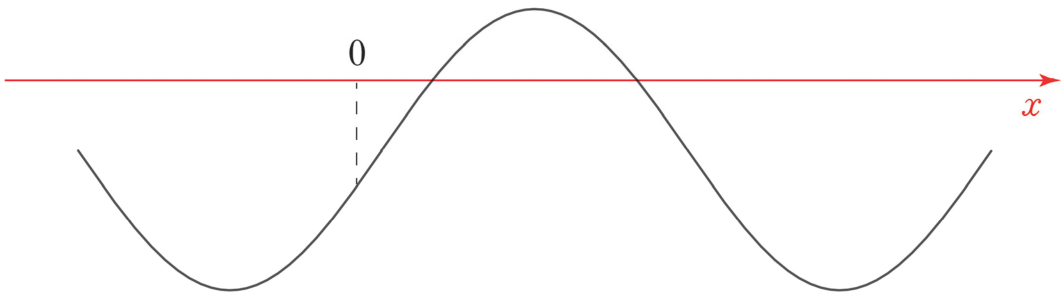
$0 < a < \frac{4}{7}$ 인 실수 a 와 유리수 b 에 대하여 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}\right]$ 에서 정의된 함수 $f(x) = 2\sin(ax) + b$ 가 있다. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 두 점 $\mathrm{A}\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{7}{2}\pi, 0\right)$ 을 지날 때, $30(a+b)$ 의 값을 구하시오. [4점]

1. 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{a},\ \frac{2\pi}{a}\right]$ 에서 주기가 $\frac{2\pi}{a}$ 인 $y=\sin ax$를 그리면 아래와 같다.



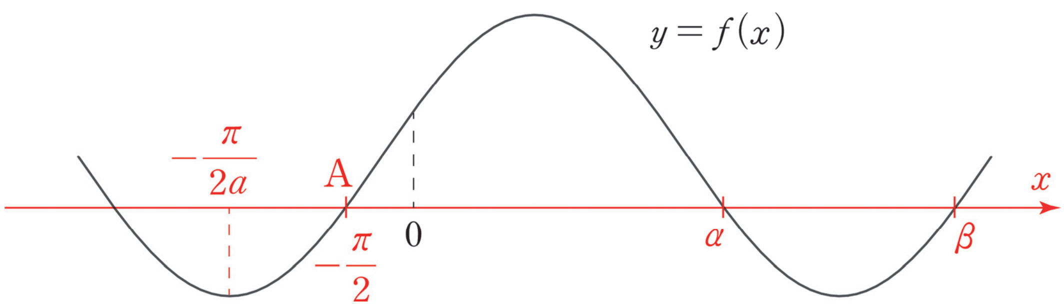
따라서 함수 $f(x)=2\sin(ax)+b$ 의 그래프 개형은 아래와 같다.

(1) $b<0$일 때



닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{a},\ \frac{2\pi}{a}\right]$ 에서 $y=f(x)$의 x절편이 모두 양수이므로 문제 조건에 모순이다.

(2) $b>0$일 때

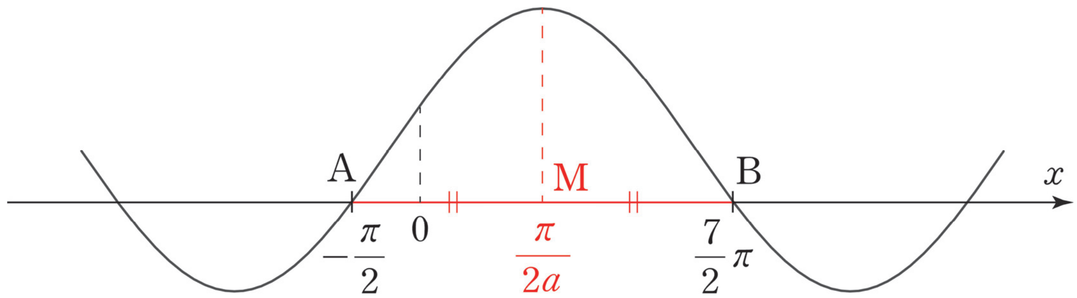


닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{a},\ \frac{2\pi}{a}\right]$ 에서 $y=f(x)$가 두 점 $\mathrm{A}\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{7}{2}\pi,\ 0\right)$을 지난다.

$0<a<\frac{4}{7}$ 이기에 $-\frac{\pi}{2a}<-\frac{\pi}{2}$이므로 점 A의 위치는 위와 같고, $\alpha=\frac{7\pi}{2}$ 또는 $\beta=\frac{7\pi}{2}$이다.

2. $\alpha = \dfrac{7\pi}{2}$ 또는 $\beta = \dfrac{7\pi}{2}$일 때, 함수 $f(x) = 2\sin(ax) + b$를 구해보자.

(1) $\alpha = \dfrac{7\pi}{2}$일 때

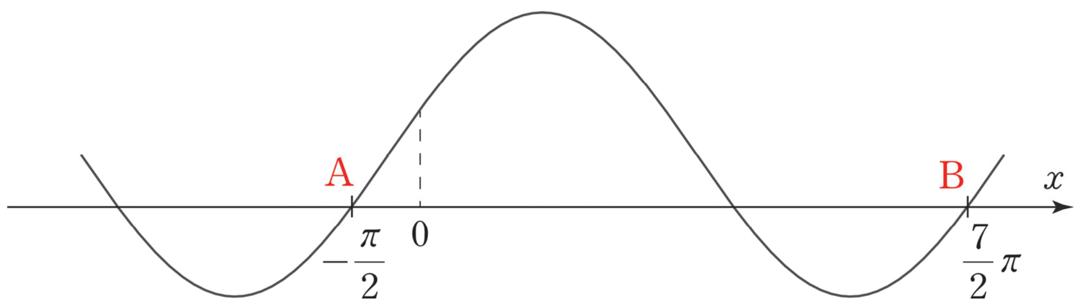


삼각함수의 대칭성을 이용하면 $\overline{\mathrm{AM}} = \overline{\mathrm{BM}}$**임을 쉽게 알 수 있다.**

$2 \times \dfrac{\pi}{2a} = -\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{7\pi}{2}$이므로 $a = \dfrac{1}{3}$이다. $f(x) = 2\sin\left(\dfrac{1}{3}x\right) + b$, $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$에서 $b = 1$이다.

따라서 $f(x) = 2\sin\left(\dfrac{1}{3}x\right) + 1$이다.

(2) $\beta = \dfrac{7\pi}{2}$일 때



구간 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{2}\right]$은 $y = f(x)$의 한 주기이다. 따라서 $\overline{\mathrm{AB}} = \dfrac{2\pi}{a}$이므로 $4\pi = \dfrac{2\pi}{a}$, $a = \dfrac{1}{2}$이다.

$f(x) = 2\sin\left(\dfrac{1}{2}x\right) + b$, $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$에서 $b = \sqrt{2}$이다. **b가 무리수이므로 문제 조건에 모순이다.**

3. $f(x) = 2\sin\left(\dfrac{1}{3}x\right) + 1$에서 $a = \dfrac{1}{3}$, $b = 1$이다. $30(a+b) = 40$이다. **답은 40!!**

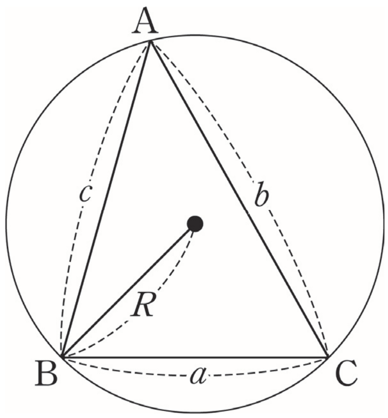
comment

무작정 수식으로만 풀려고 했다면 시원하게 해결되는 부분이 있었거나 필요한 식을 얻어내기 힘들었을 것이다. 삼각함수 대칭성을 최대한 이용하여 삼각방정식의 해를 구하는 데에 익숙해지자.

◆ 사인법칙, 코사인법칙

◆ 1. 사인법칙

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$이다.



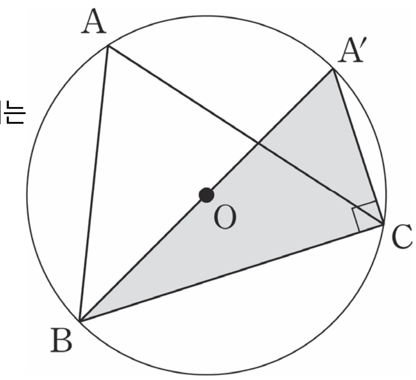
$a=2R\sin A,\ b=2R\sin B,\ c=2R\sin C$이므로 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$임을 알 수 있다.

삼각형 ABC의 넓이 S는 $\dfrac{abc}{4R}$이다. 증명은 다음과 같다.

$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$이다. $\sin A=\dfrac{a}{2R}$이므로 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$에 대입하면 $S=\dfrac{abc}{4R}$이다.

사인법칙의 증명은 다음과 같다.

(1) 삼각형 ABC가 예각삼각형일 때,

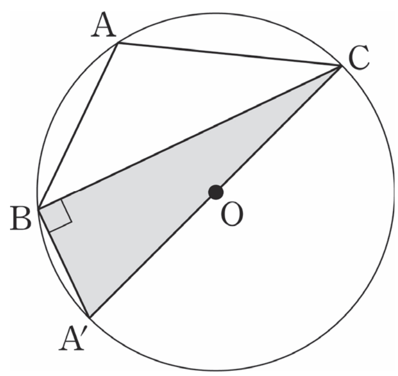


$\overline{\mathrm{BC}}$를 밑변으로 하고 지름 $\overline{\mathrm{A'B}}$를 빗변으로 하는 직각삼각형을 그린다.
$\angle\mathrm{BAC}$, $\angle\mathrm{BA'C}$는 호 BC에 대한 원주각이기에 $\angle\mathrm{BAC}$의 크기는 $\angle\mathrm{BA'C}$의 크기와 같다.

$\angle\mathrm{BCA'} = \dfrac{\pi}{2}$, $\overline{\mathrm{A'B}} = 2R$, $\overline{\mathrm{BC}} = a$이므로 $\sin A' = \dfrac{a}{2R} = \sin A$ 이다.

마찬가지 방법으로 $\sin B = \dfrac{b}{2R}$, $\sin C = \dfrac{c}{2R}$를 증명할 수 있다.

(2) 삼각형 ABC가 둔각삼각형일 때,



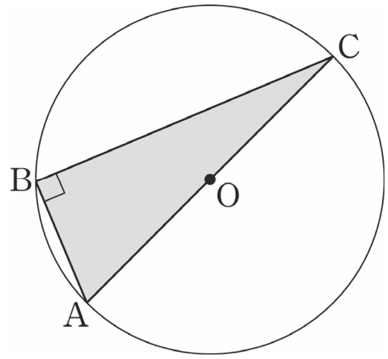
$\overline{\mathrm{BC}}$를 밑변으로 하고 지름 $\overline{\mathrm{A'C}}$를 빗변으로 하는 직각삼각형을 그린다.
사각형 $\mathrm{ABA'C}$는 원에 내접하는 사각형이다.
따라서 $\angle\mathrm{BAC} + \angle\mathrm{BA'C} = \pi$이다.

$\angle\mathrm{A'BC} = \dfrac{\pi}{2}$, $\overline{\mathrm{A'C}} = 2R$, $\overline{\mathrm{BC}} = a$이므로

$\sin A' = \dfrac{a}{2R} = \sin(\pi - A) = \sin A$이다.

마찬가지 방법으로 $\sin B = \dfrac{b}{2R}$, $\sin C = \dfrac{c}{2R}$를 증명할 수 있다.

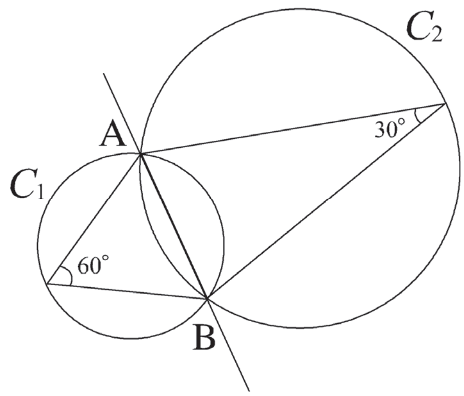
(3) 삼각형 ABC가 직각삼각형일 때,



그림에서 $\sin A = \dfrac{a}{2R}$, $\sin B = \dfrac{b}{2R}$, $\sin C = \dfrac{c}{2R}$임이 자명하다.

예제(11) 04년 6월 교육청 고2 가형 28번

두 원 C_1, C_2가 그림과 같이 두 점 A, B에서 만난다. 선분AB의 길이는 12이고, 그에 대한 원주각의 크기는 각각 60°, 30°이다. 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이를 각각 R_1, R_2라고 할 때, ${R_1}^2 + {R_2}^2$의 값을 구하시오. [4점]



원 C_1에서 사인법칙을 적용하자. $\dfrac{\overline{AB}}{\sin 60^\circ} = \dfrac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 8\sqrt{3} = 2R_1$이므로 $R_1 = 4\sqrt{3}$이다.

마찬가지로, 원 C_2에서도 사인법칙을 적용하자. $\dfrac{\overline{AB}}{\sin 30^\circ} = \dfrac{12}{\frac{1}{2}} = 24 = 2R_2$이므로 $R_2 = 12$이다.

${R_1}^2 + {R_2}^2 = 48 + 144 = 192$이다. **답은 192!!**

예제(12) 00학년도 수능 인문계 12번

$\triangle \mathrm{ABC}$ 에서

$$6\sin \mathrm{A} = 2\sqrt{3}\sin \mathrm{B} = 3\sin \mathrm{C}$$

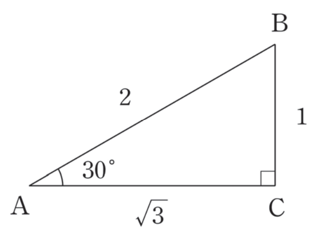
가 성립할 때, $\angle \mathrm{A}$ 의 크기는? [3 점]

① $120°$ ② $90°$ ③ $60°$ ④ $45°$ ⑤ $30°$

사인법칙을 활용하자. $\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin A} = \dfrac{\overline{\mathrm{CA}}}{\sin B} = \dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin C}$, $6\sin \mathrm{A} = 2\sqrt{3}\sin \mathrm{B} = 3\sin \mathrm{C}$ 에서

$\overline{\mathrm{BC}} = \dfrac{k}{6}$, $\overline{\mathrm{AC}} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}k$, $\overline{\mathrm{AB}} = \dfrac{k}{3}$이다.

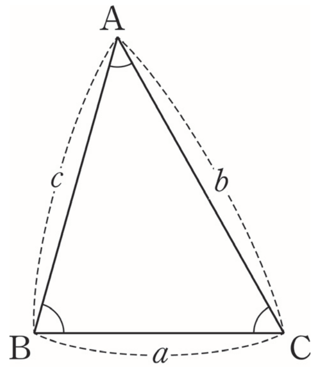
$k=6$이라 하면 $\overline{\mathrm{AB}} = 2$, $\overline{\mathrm{BC}} = 1$, $\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{3}$ 이므로 $\triangle \mathrm{ABC}$는 다음과 같이 그려진다.



$\angle \mathrm{A} = 30°$ 이다. **답은 ⑤!!**

※ $\overline{\mathrm{BC}} = a$, $\overline{\mathrm{AC}} = b$, $\overline{\mathrm{AB}} = c$라 하면 $\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$이다. 이를 바로 활용해도 좋다.

2. 코사인법칙



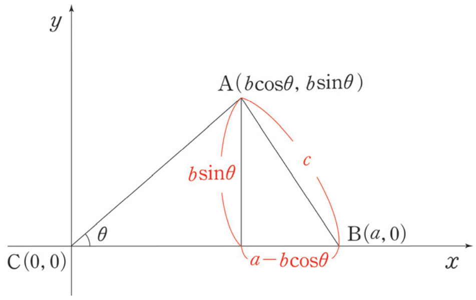
삼각형 ABC에서 다음이 성립한다.

1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
2. $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$
3. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

이를 각에 대하여 나타내면 다음과 같다.

1. $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
2. $\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$
3. $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

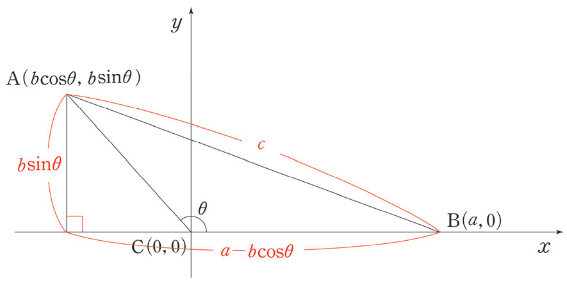
(1) 삼각형 ABC가 예각삼각형일 때,



점 C는 원점, 점 B는 $(a, 0)$, 점 A는 $(b\cos\theta, b\sin\theta)$이다.

그림으로부터 $c^2=(a-b\cos\theta)^2+(b\sin\theta)^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$임을 알 수 있다.

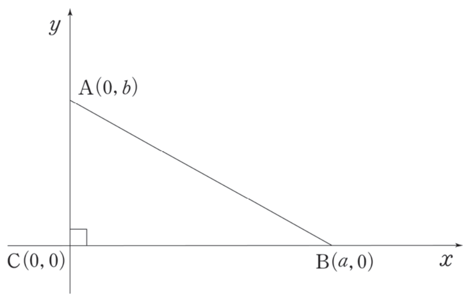
(2) 삼각형 ABC가 둔각삼각형일 때,



점 C는 원점, 점 B는 $(a, 0)$, 점 A는 $(b\cos\theta, b\sin\theta)$이다.

그림으로부터 $c^2=(b\cos\theta-a)^2+(b\sin\theta)^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$임을 알 수 있다.

(3) 삼각형 ABC가 직각삼각형일 때,



점 C는 원점, 점 B는 $(a, 0)$, 점 A는 $(0, b)$이다.

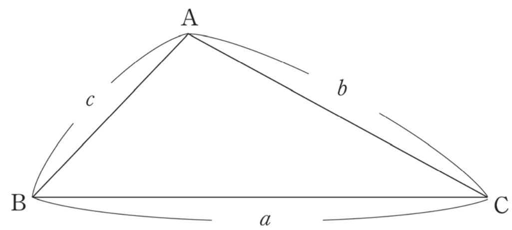
그림으로부터 $c^2=a^2+b^2=a^2+b^2-2ab\cos\frac{\pi}{2}$임을 알 수 있다.

◆ 3. 사인법칙, 코사인법칙 활용

삼각형의 결정조건에는 **세 변의 길이가 주어질 때, 두 변의 길이와 그 끼인각이 주어질 때, 한 변의 길이와 그 양 끝 각이 주어질 때**가 있다. 여기에서 주어지지 않은 나머지 변의 길이나 각에 대한 정보를 알기 위해 사인법칙이나 코사인법칙을 이용해야 한다.

각 상황에서 언제 사인법칙이 편할지, 언제 코사인법칙이 편할지 구분하는 것은 중요하다. 이를 고려하지 않고 무작정 사인법칙이나 코사인법칙을 쓴다면 구하려고 하는 변이나 각과 관련된 식이 너무 복잡해질 수 있다. 언제 사인법칙이 더 편하고 언제 코사인법칙이 더 편할지 알려주도록 하겠다.

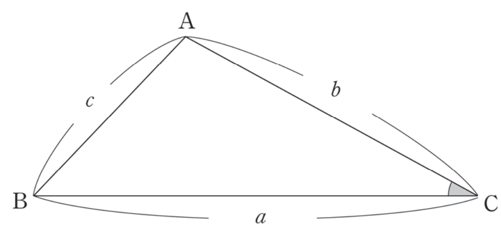
세 변의 길이가 주어질 때는 코사인법칙을 이용하는 것이 유리하다. 코사인법칙을 이용하여 세 각에 대한 정보를 쉽게 알 수 있다.



코사인법칙을 이용하면 $\cos\angle\mathrm{A}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos\angle\mathrm{B}=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $\cos\angle\mathrm{C}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$이다.

또한, 헤론 공식 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\left(s=\dfrac{a+b+c}{2}\right)$을 이용하여 삼각형의 넓이를 쉽게 구할 수 있다.

두 변의 길이와 그 끼인각이 주어질 때는 코사인법칙을 이용하는 것이 유리하다. 코사인법칙을 이용하여 나머지 한 변의 길이를 쉽게 알 수 있다. 이후 나머지 두 각에 대한 정보도 코사인법칙이나 사인법칙을 이용하면 쉽게 알 수 있다.

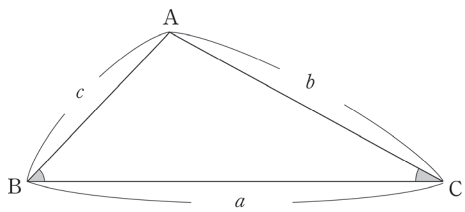


코사인법칙을 이용하면 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle\mathrm{C}$로 나머지 한 변의 길이 c를 알 수 있다.

이후에 코사인법칙을 이용해 $\cos\angle\mathrm{A}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos\angle\mathrm{B}=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$를 구하거나

사인법칙을 이용해 $\sin\angle\mathrm{A}=\dfrac{a\sin\angle\mathrm{C}}{c}$, $\sin\angle\mathrm{B}=\dfrac{b\sin\angle\mathrm{C}}{c}$를 구할 수 있다.

한 변의 길이와 두 각의 크기가 주어질 때는 사인법칙을 이용하는 것이 유리하다. 두 각의 크기를 알면 삼각형 내각의 합이 π이므로 나머지 한 각의 크기도 아는 거나 다름이 없다. 사인법칙을 이용하여 두 변의 길이를 쉽게 알 수 있다.

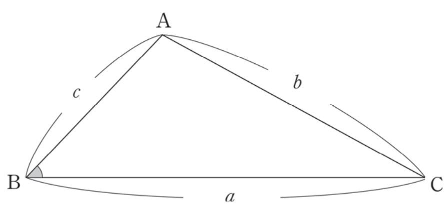


삼각형 내각의 합이 π이므로 $\angle \mathrm{A} = \pi - (\angle \mathrm{B} + \angle \mathrm{C})$이다.

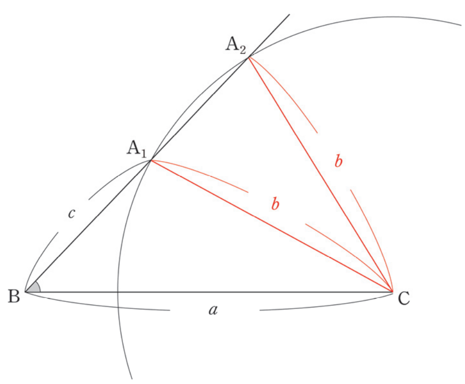
사인법칙을 이용해 $b = \dfrac{a \sin \angle \mathrm{B}}{\sin \mathrm{A}}$, $c = \dfrac{a \sin \angle \mathrm{C}}{\sin \mathrm{A}}$를 구할 수 있다.

※ **두 변의 길이와 끼인각이 아닌 각 하나가 주어질 때는 삼각형의 결정조건은 아니다.** 그럼에도 불구하고 코사인법칙이나 사인법칙을 적절히 이용하여 나머지 한 변의 길이와 나머지 두 각에 대한 정보를 알 수 있다.

두 변의 길이와 끼인각이 아닌 각 하나가 주어질 때는 코사인법칙을 이용하는 것이 유리하다. 코사인법칙을 이용하여 나머지 한 변의 길이를 쉽게 알 수 있다. 이후 나머지 두 각에 대한 정보도 코사인법칙이나 사인법칙을 이용하면 쉽게 알 수 있다.

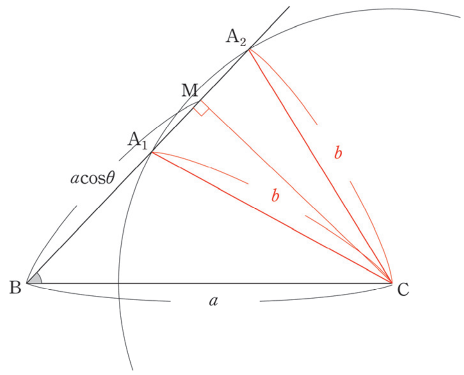


코사인법칙을 이용하면 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos \angle \mathrm{B}$로 나머지 한 변의 길이 c를 알 수 있다.



다만, 다루는 삼각형에 따라 위 그림과 같이 **점 A의 위치가 점 A_1이거나 점 A_2일 수 있다.**

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos \angle \mathrm{B}$를 이용해 나머지 한 변의 길이 c를 구할 때, c**에 대한 이차방정식이 나오는 이유**도 이 때문이다.



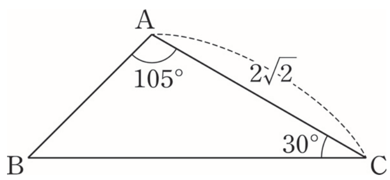
$\angle B = \theta$로 두고 c**에 대한 이차방정식** $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\angle B$**를 정리**하면
$c = a\cos\theta \pm \sqrt{b^2 - a^2\sin^2\theta}$이다. $\overline{BM} = a\cos\theta$**이므로 점 A의 위치가 점** A_1**이면** $c < a\cos\theta$**에서**
$c = a\cos\theta - \sqrt{b^2 - a^2\sin^2\theta}$ **이고, 점 A의 위치가 점** A_2**이면** $c > a\cos\theta$**에서**
$c = a\cos\theta + \sqrt{b^2 - a^2\sin^2\theta}$ **임을 알 수 있다.**

점 A의 위치가 점 A_1이면 $\angle A$가 둔각이고 점 A의 위치가 점 A_2이면 $\angle A$가 예각이다.
따라서 $\angle A$**가 둔각인지 예각인지에 따라** $c = a\cos\theta - \sqrt{b^2 - a^2\sin^2\theta}$ **인지**
$c = a\cos\theta + \sqrt{b^2 - a^2\sin^2\theta}$ **인지를 결정할 수 있다.**

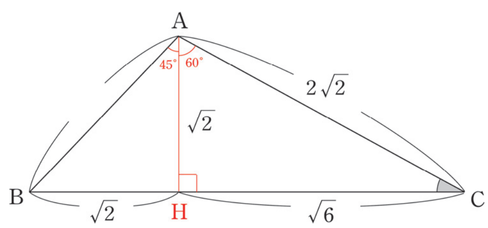
이후에 코사인법칙을 이용해 $\cos\angle A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos\angle C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$를 구하거나
사인법칙을 이용해 $\sin\angle A = \dfrac{a\sin\angle B}{b}$, $\sin\angle C = \dfrac{c\sin\angle B}{b}$를 구할 수 있다.

※ 주의

사인법칙, 코사인법칙을 쓰는 것이 최선이 아닐 때도 존재한다.



$\overline{BC}$의 길이를 구해보자. $\angle B=45^\circ$이다. '어? 이거 완전 사인법칙 상황 아니냐?' 하며 $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\overline{BC}}{\sin 105^\circ}$를 이용하려 하려 했다면 잠깐 멈춰보자.
미적분 선택자라면 $\sin 105^\circ=\sin(45^\circ+60^\circ)$는 삼각함수 덧셈정리를 이용해 구할 수도 있으나 그리 편한 선택은 아닐 거 같다.



점 A에서 선분 BC에 수선의 발 H를 내려 직각삼각형 2개를 만든다.
삼각형 AHC에서 특수각 삼각비를 이용하면 $\overline{AH}=\sqrt{2}$, $\overline{CH}=\sqrt{6}$임을 쉽게 알 수 있고,
삼각형 AHB에서 특수각 삼각비를 이용하면 $\overline{BH}=\sqrt{2}$임을 쉽게 알 수 있다.
$\overline{BC}=\overline{BH}+\overline{HC}=\sqrt{2}+\sqrt{6}$이다.

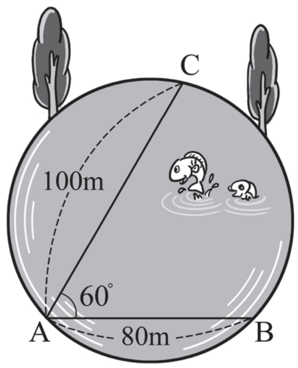
따라서 사인법칙이나 코사인법칙을 이용하기 전에 수선, 특수각 삼각비를 최대한 이용해 보는 것이 좋다.

예제(13) 08년 3월 교육청 고2 21번

원 모양의 호수의 넓이를 구하기 위해 호수의 가장자리의 세 지점 A , B , C 에서 거리와 각을 측정한 결과가 다음과 같았다.

$$\overline{AB} = 80\,\mathrm{m}$$
$$\overline{AC} = 100\,\mathrm{m}$$
$$\angle CAB = 60^{\circ}$$

이때 이 호수의 넓이는? [4점]



① $2400\pi\,\mathrm{m}^2$ ② $2500\pi\,\mathrm{m}^2$ ③ $2600\pi\,\mathrm{m}^2$ ④ $2700\pi\,\mathrm{m}^2$ ⑤ $2800\pi\,\mathrm{m}^2$

1. $\overline{BC} = a$라 하자. $\triangle ABC$**에서** $\overline{AB}$, $\overline{AC}$**의 길이와 끼인각** $\angle BAC$**를 알기에 코사인법칙을 활용하여** $\overline{BC} = a$**를 구할 수 있다.** $a^2 = 100^2 + 80^2 - 2 \cdot 100 \cdot 80 \cdot \cos 60^{\circ} = 8400$이므로 $a = 20\sqrt{21}$이다.

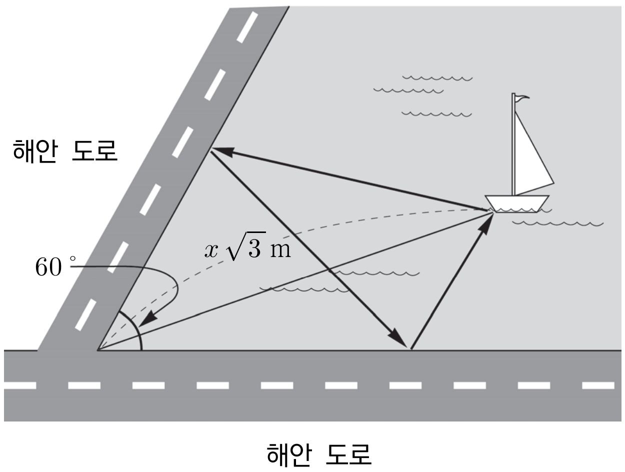
2. 사인법칙을 활용하여 $\triangle ABC$의 외접원의 반지름을 구해보자.

$\dfrac{a}{\sin 60^{\circ}} = 2R$이므로 $\dfrac{20\sqrt{21}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = 40\sqrt{7} = 2R$에서 $R = 20\sqrt{7}$이다.

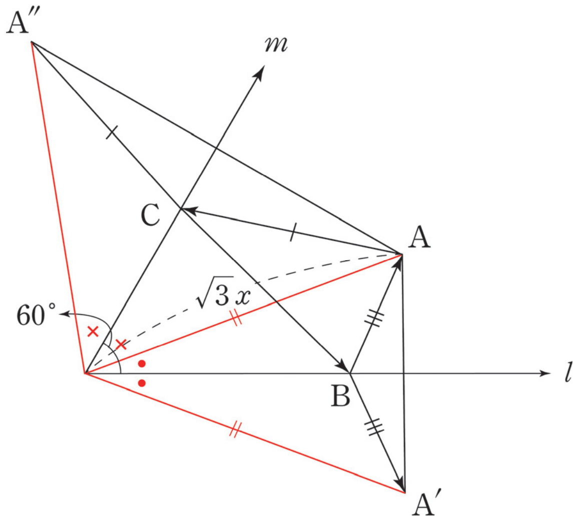
따라서 호수의 넓이는 $\pi R^2 = 2800\pi$이다. **답은 ⑤!!**

예제(14) 13년 3월 교육청 B형 29번 (고2)

그림과 같이 바다에 인접해 있는 두 해안 도로가 $60°$ 의 각을 이루며 만나고 있다. 두 해안 도로가 만나는 지점에서 바다쪽으로 $x\sqrt{3}\,\mathrm{m}$ 떨어져 있는 배에서 출발하여 두 해안 도로를 차례대로 한 번씩 거쳐 다시 배로 되돌아오는 수영코스의 최단길이가 $300\,\mathrm{m}$ 일 때, x 의 값을 구하시오. (단, 배는 정지해 있고, 두 해안 도로는 일직선 모양이며 그 폭은 무시한다.) [4점]



1. 배의 위치를 점 A, 좌측의 해안 도로를 m, 아래측의 해안 도로를 l이라 하자.
배에서 l을 거칠 때 만나는 l위의 점을 B. m을 거칠 때 만나는 m위의 점을 C라 하자.



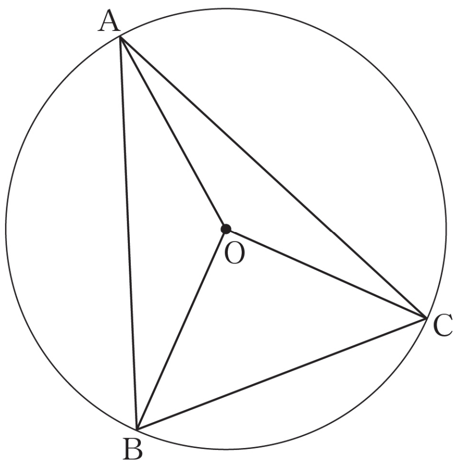
그림과 같이 점 A를 l에 대하여 대칭이동 시킨 점을 A', 점 A를 m에 대하여 대칭이동 시킨 점을 A''이라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{A'B}}$, $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{A''C}}$이므로
$\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{A'B}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CA''}}\geq\overline{\mathrm{A'A''}}=300$이다.

2. 두 해안 도로의 교점을 O라 하면 $\angle\mathrm{A'OA''}=60^\circ\times2=120^\circ$이다.
$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OA'}}=\overline{\mathrm{OA''}}=x\sqrt{3}$이므로 $\triangle\mathrm{OA'A''}$에서 코사인법칙을 적용하면
$300^2=(x\sqrt{3})^2+(x\sqrt{3})^2-2\times(x\sqrt{3})^2\cos120^\circ=9x^2$이다. 따라서 $x=100$이다.

답은 100!!

예제(15) 20년 3월 교육청 가형 19번

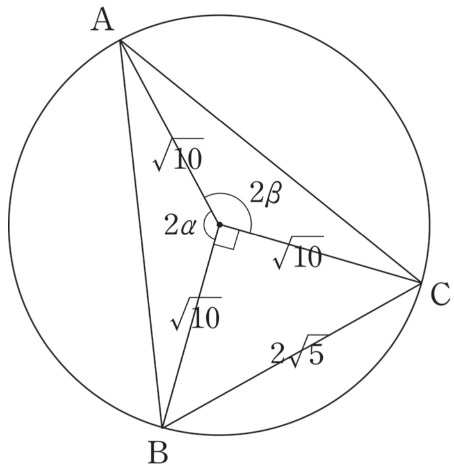
그림과 같이 중심이 O 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 인 원에 내접하는 예각삼각형 ABC 에 대하여 두 삼각형 OAB, OCA 의 넓이를 각각 S_1, S_2 라 하자. $3S_1 = 4S_2$ 이고 $\overline{\mathrm{BC}} = 2\sqrt{5}$ 일 때, 선분 AB 의 길이는? [4점]



① $2\sqrt{7}$ ② $\sqrt{30}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{34}$ ⑤ 6

1. $\overline{BC}=2\sqrt{5}$, $\overline{OB}=\overline{OC}=\sqrt{10}$ 이므로 삼각형 OBC는 직각이등변삼각형이고 $\angle BOC=\frac{\pi}{2}$ 이다.

조건에 맞게 그림을 그려주자.



$\angle AOB=2\alpha$, $\angle AOC=2\beta$라 하면 두 삼각형 OAB, OCA 의 넓이 S_1, S_2는 각각

$S_1=\frac{1}{2}\times(\sqrt{10})^2\times\sin 2\alpha=5\sin 2\alpha$, $S_2=\frac{1}{2}\times(\sqrt{10})^2\times\sin 2\beta=5\sin 2\beta$이다.

주어진 조건에서 $3S_1=4S_2$이므로 $\sin 2\alpha=\frac{4}{3}\sin 2\beta$이다.

$2\alpha+2\beta+\frac{\pi}{2}=2\pi$ 이므로 $\beta=\frac{3}{4}\pi-\alpha$이다.

따라서 $\sin 2\alpha=\frac{4}{3}\sin\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)$**이므로** $\sin 2\alpha=-\frac{4}{3}\cos 2\alpha$**에서** $\tan 2\alpha=-\frac{4}{3}$ **이다.**

$\tan 2\alpha=-\frac{4}{3}$에서 $\cos 2\alpha=-\frac{3}{5}$이다. $\left(\frac{\pi}{2}<2\alpha<\pi\right)$

2. $\overline{OA}=\overline{OB}=\sqrt{10}$, $\angle AOB=2\alpha$이다.

$\triangle OAB$**에서** $\overline{OA}$, $\overline{OB}$**와 끼인각** $\angle AOB$**의 크기를 알기에 코사인법칙을 활용하여**
$\overline{AB}$**를 표현하면 된다.**

$$\begin{aligned}\overline{AB}&=\sqrt{(\overline{OA})^2+(\overline{OB})^2-2\times\overline{OA}\times\overline{OB}\cos\alpha}\\&=\sqrt{(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2-2(\sqrt{10})^2\times\left(-\frac{3}{5}\right)}\\&=4\sqrt{2}\end{aligned}$$

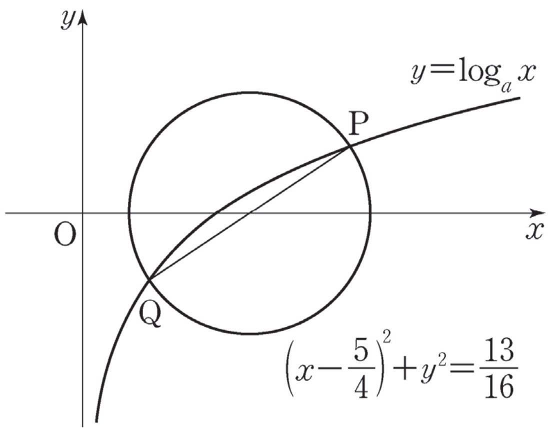
따라서 $\overline{AB}=4\sqrt{2}$ 이다. **답은 ③!!**

CHAPTER

04 유제

01 18학년도 9월 평가원 가형 16번

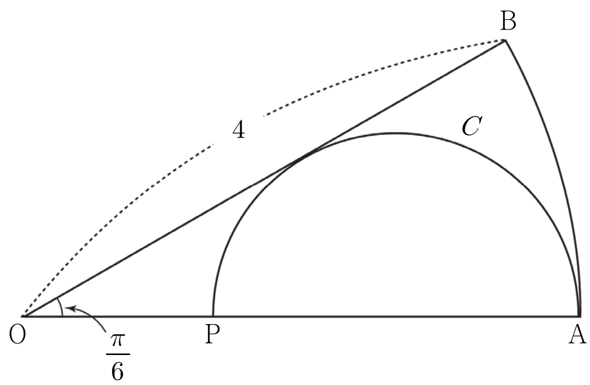
$a>1$ 인 실수 a 에 대하여 곡선 $y=\log_a x$ 와 원 $C:\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+y^2=\frac{13}{16}$ 의 두 교점을 P, Q 라 하자. 선분 PQ 가 원 C의 지름일 때, a 의 값은? [4점]



① 3　② $\frac{7}{2}$　③ 4　④ $\frac{9}{2}$　⑤ 5

02 19년 6월 교육청 고2 가형 17번

그림과 같이 반지름의 길이가 4이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$인 부채꼴 OAB가 있다. 선분 OA 위의 점 P에 대하여 선분 PA를 지름으로 하고 선분 OB에 접하는 반원을 C라 할 때, 부채꼴 OAB의 넓이를 S_1, 반원 C의 넓이를 S_2라 하자. $S_1 - S_2$의 값은? [4점]



① $\frac{\pi}{9}$ ② $\frac{2}{9}\pi$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{4}{9}\pi$ ⑤ $\frac{5}{9}\pi$

03 19년 3월 교육청 가형 26번

$0 \le x \le \pi$일 때, 2 이상의 자연수 n에 대하여 두 곡선 $y = \sin x$와 $y = \sin(nx)$의 교점의 개수를 a_n이라 하자. $a_3 + a_5$의 값을 구하시오. [4점]

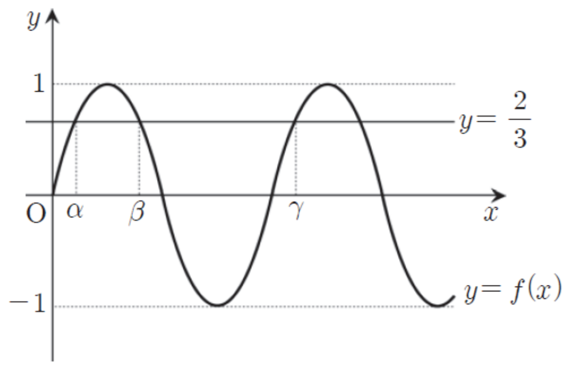
04 19년 6월 교육청 고2 나형 18번

직선 $y = -\frac{1}{5\pi}x + 1$과 함수 $y = \sin x$의 그래프의 교점의 개수는? [4점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

05 11년 3월 교육청 고2 17번

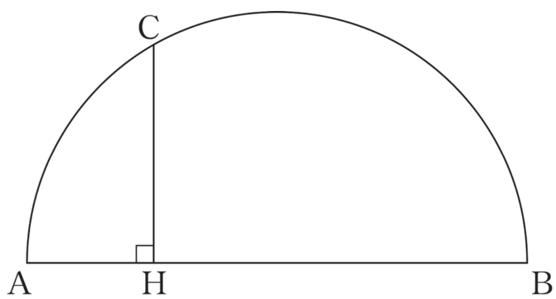
함수 $f(x)=\sin\pi x\ (x\geq 0)$의 그래프와 직선 $y=\frac{2}{3}$가 만나는 점의 x좌표를 작은 것부터 차례대로 α, β, γ라 할 때, $f(\alpha+\beta+\gamma+1)+f\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]



① $-\frac{2}{3}$　② $-\frac{1}{3}$　③ 0　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{2}{3}$

06 17년 3월 교육청 가형 25번

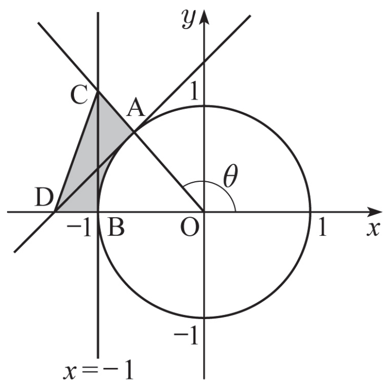
그림과 같이 길이가 12인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 반원 위에서 호 BC의 길이가 4π인 점 C를 잡고 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{\mathrm{CH}}^2$의 값을 구하시오. [3점]



07 10년 3월 교육청 고2 21번

그림과 같이 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 A가 제 2사분면에 있을 때 동경 OA가 나타내는 각의 크기를 θ라 하자. 점 B$(-1, 0)$을 지나는 직선 $x=-1$과 동경 OA가 만나는 점을 C, 점 A에서의 접선이 x축과 만나는 점을 D라 하자. 다음 중 삼각형 OCD의 넓이에서 부채꼴 OAB의 넓이를 뺀 어두운 부분의 넓이와 항상 같은 것은?

(단, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$) [4점]



① $\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}-\pi+\theta\right)$

② $\frac{1}{2}\left(-\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}-\pi+\theta\right)$

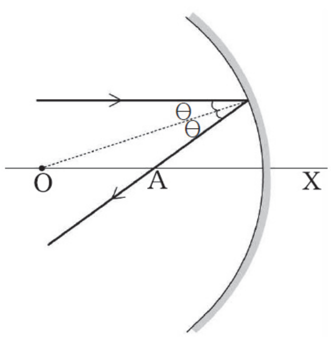
③ $\frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}-\theta\right)$

④ $\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}-\pi+\theta\right)$

⑤ $\frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}-\theta\right)$

08 03학년도 수능 인문계 9번

중심이 O 이고 반지름의 길이가 R 인 구면거울이 있다. 그림과 같이 OX 축에 평행하게 입사된 빛이 거울에 반사된 후 축과 만나는 점을A 라고 할 때, 선분 OA 의 길이는?
(단, 입사각과 반사각의 크기는 θ 로 같고, $0° < \theta < 20°$ 이다.) [2점]



① $\frac{R}{2\cos\theta}$　② $\frac{R}{2\sin\theta}$　③ $R(1-\cos\theta)$　④ $\frac{R}{2\cos 2\theta}$　⑤ $\frac{R}{2\sin 2\theta}$

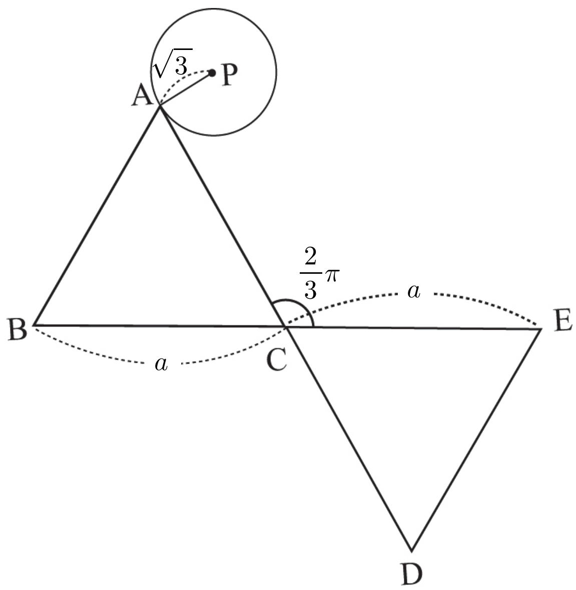
09 20학년도 수능 가형 7번

$0 < x < 2\pi$일 때, 방정식 $4\cos^2 x - 1 = 0$과 부등식 $\sin x \cos x < 0$을 동시에 만족시키는 모든 x의 값의 합은? [3점]

① 2π ② $\frac{7}{3}\pi$ ③ $\frac{8}{3}\pi$ ④ 3π ⑤ $\frac{10}{3}\pi$

10 08년 6월 교육청 고2 가형 18번

그림과 같이 $\triangle \mathrm{ABC}$와 $\triangle \mathrm{CDE}$는 한 변의 길이가 a인 정삼각형이고, $\angle \mathrm{ACE} = \frac{2}{3}\pi$이다. 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 원 P가 $\triangle \mathrm{ABC}$와 $\triangle \mathrm{CDE}$의 둘레를 외접하면서 시계 방향으로 한 바퀴 돌아 처음 출발한 자리로 왔을 때, 원 P의 중심이 움직인 거리가 $23 + \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$이다. a의 값은? [4점]



① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

CHAPTER

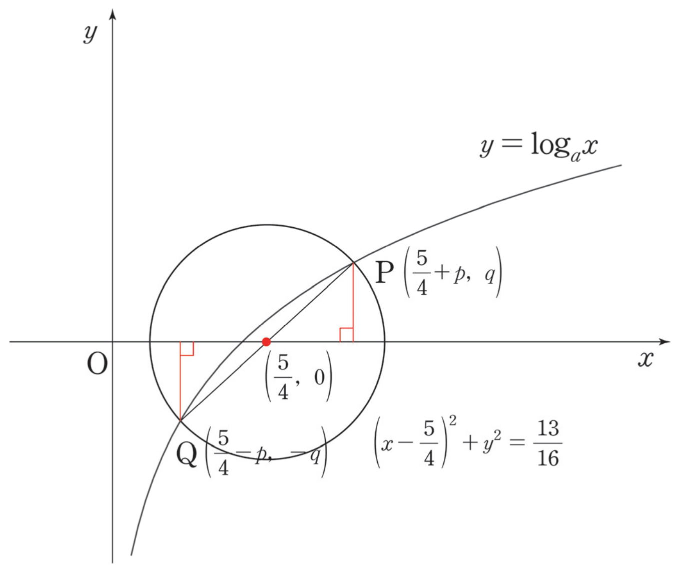
04 해설

01 18학년도 9월 평가원 16번

답 : ③

1. **선분 PQ는 원의 지름이므로 원의 중심을 지난다. 원의 중심을 점 R이라 하자.**

   점 R의 좌표는 $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$이다. 이를 활용하여 점 P와 점 Q의 좌표도 잡아주자.



   점 P의 좌표는 $\left(\frac{5}{4}+p, q\right)$, 점 Q의 좌표는 $\left(\frac{5}{4}-p, -q\right)$로 나타낼 수 있다.

   $(\text{반지름 길이})^2=\frac{13}{16}$이므로 $p^2+q^2=\frac{13}{16}$임을 쉽게 알 수 있다.

2. 점 P와 점 Q가 곡선 $y=\log_a x$위에 있음을 이용하여 p와 q의 값을 구하자.

   $\log_a\left(\frac{5}{4}+p\right)=q$, $\log_a\left(\frac{5}{4}-p\right)=-q$ 에서 $\frac{5}{4}+p=\dfrac{1}{\frac{5}{4}-p}$ 이다.

   이를 정리하면 $\left(\frac{5}{4}+p\right)\left(\frac{5}{4}-p\right)=1$ 이다.

   $p^2=\frac{9}{16}$에서 $p=\frac{3}{4}\,(p>0)$이고, $p^2+q^2=\frac{13}{16}$이므로 $q^2=\frac{1}{4}$, $q=\frac{1}{2}\,(q>0)$이다.

   $\log_a\left(\frac{5}{4}+p\right)=\log_a 2=q=\frac{1}{2}$에서 $a=4$이다.

(뒷 페이지 다른 풀이)

※ 다른 풀이

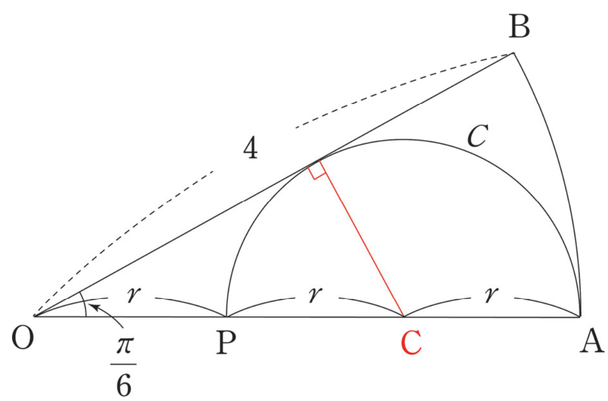
점 P의 좌표를 $(t, \log_a t)$라 하자. 점 Q의 y좌표는 점 P의 y좌표와 부호가 반대이므로 $-\log_a t = \log_a \frac{1}{t}$이다. 따라서 점 Q의 x좌표가 $\frac{1}{t}$임을 구할 수 있다.
점 P, 점 R, 점 Q의 x좌표끼리 등차수열을 이루므로, 점 P와 점 Q의 x좌표끼리의 합은 점 R의 x좌표의 두 배와 같다. 점 R의 x좌표는 $\frac{5}{4}$이므로 $t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}$에서 $t=2\left(t>\frac{1}{t}\right)$이다.

점 P는 원 C 위에 있으므로 대입하면 $\left(2-\frac{5}{4}\right)^2+(\log_a 2)^2=\frac{13}{16}$에서 $(\log_a 2)^2=\frac{1}{4}$이고,
$\log_a 2=\frac{1}{2}\,(\log_a 2>0)$이므로 $a=4$이다.

02 19년 6월 교육청 고2 가형 17번

답 : ④

새 부리를 닮은 내접원 꼴과 매우 유사하게 생겼다. 반원의 중심에서 접점을 잇는 보조선을 긋고 직각을 표시하자.

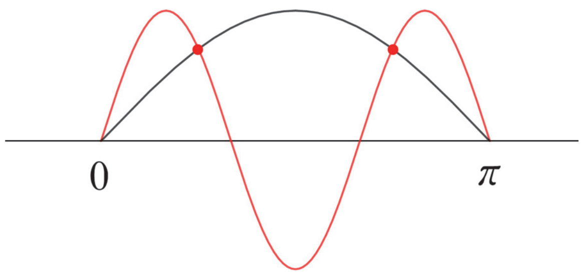


반원의 중심을 점 C라고 하자. $\angle \mathrm{COB}=\frac{\pi}{6}$이므로 $\overline{\mathrm{OC}}=2r$이다. 따라서 $\overline{\mathrm{OA}}=3r=4$이다.
$r=\frac{4}{3}$이므로 $S_1=\frac{1}{2}\times 4^2\times\frac{\pi}{6}=\frac{4}{3}\pi$, $S_2=\frac{1}{2}\times\pi\times r^2=\frac{1}{2}\times\frac{16}{9}\pi=\frac{8}{9}\pi$이다.
따라서 $S_1-S_2=\frac{4}{3}\pi-\frac{8}{9}\pi=\frac{4}{9}\pi$이다.

03 19년 3월 교육청 가형 26번

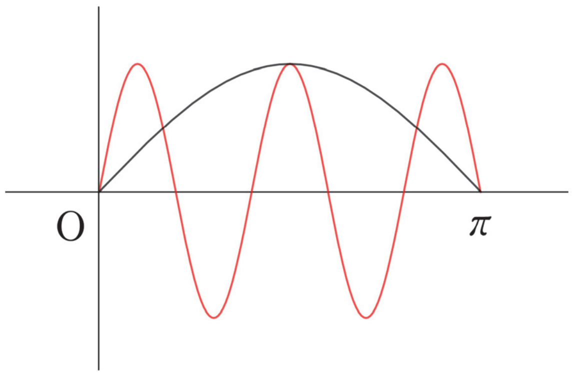
답 : 9

1. a_3를 구하기 위해 두 곡선 $y=\sin x$와 $y=\sin 3x$의 그래프를 그려보자.



$a_3=4$이다.

2. a_5를 구하기 위해 두 곡선 $y=\sin x$와 $y=\sin 5x$의 그래프를 그려보자.



$a_5=5$이다. 따라서 $a_3+a_5=9$이다.

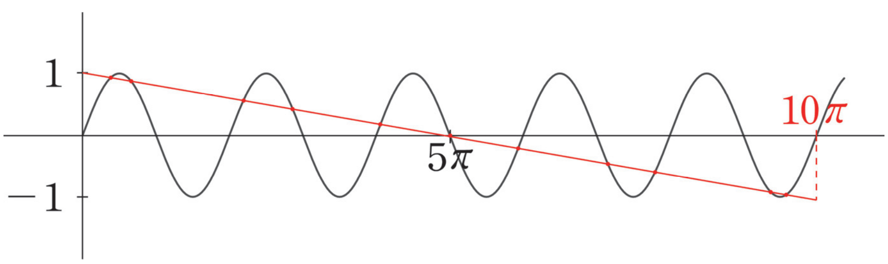
04 19년 6월 교육청 고2 나형 18번

답 : ⑤

$y=\sin x$의 **최솟값은 -1, 최댓값은 1이다.** $y=-\dfrac{1}{5\pi}x+1$**는 점** $(0,1)$**, 점** $(10\pi,-1)$**을 지난다.**

또한, 직선 $y=-\dfrac{1}{5\pi}x+1$**의 그래프와 함수** $y=\sin x$**는 점** $(5\pi,0)$**에 대하여 대칭이다.**

이를 유의하여 그래프를 그려보자.

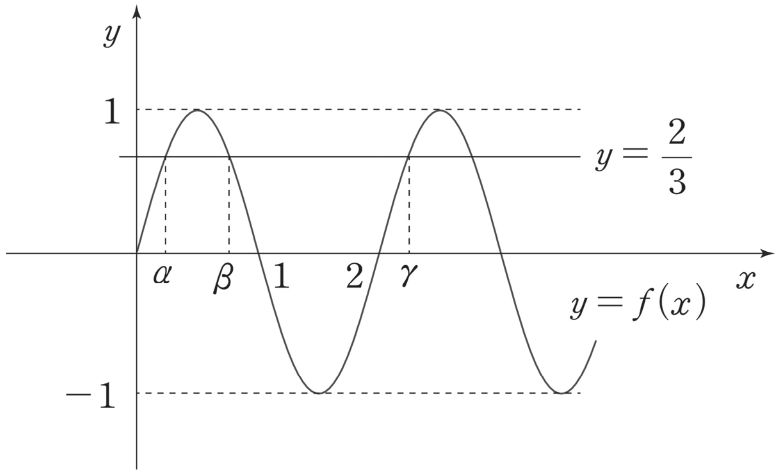


교점의 개수는 $5\times 2+1=11$이다.

05 11년 3월 교육청 고2 17번

답 : ②

함수 $f(x)=\sin\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$이다. 따라서 $f(x)=f(x+2)$이다.



삼각함수의 대칭성을 이용하면 $\alpha+\beta=1$이므로 $f(\alpha+\beta+\gamma+1)=f(\gamma+2)=f(\gamma)=\frac{2}{3}$이다.

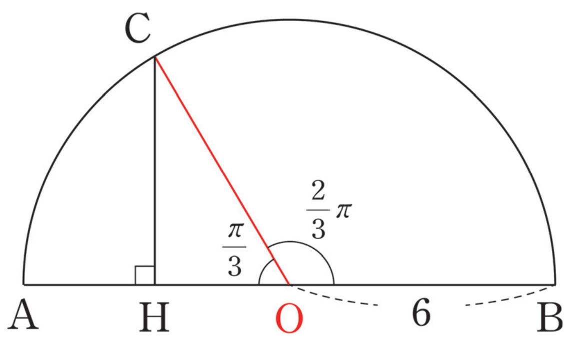
$f\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=\sin\frac{3}{2}\pi=-1$이다.

따라서 $f(a+\beta+\gamma+1)+f\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{3}$이다.

06 17년 3월 교육청 가형 25번

답 : 27

반원의 중심을 먼저 표시하자. 반원의 중심을 점 O라고 하자.



$\angle\mathrm{COB}=\theta$라 하면, 호 BC의 길이 $l=6\theta=4\pi$이므로 $\theta=\frac{2}{3}\pi$이다.

$\angle\mathrm{COH}=\frac{\pi}{3}$이므로 $\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{OC}}\sin\frac{2}{3}\pi=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$이다. 따라서 $\overline{\mathrm{CH}}^2=27$이다.

07 10년 3월 교육청 고2 21번

답 : ④

1. 부채꼴 OAB의 넓이를 구하자.

   원의 반지름은 1, $\angle \mathrm{AOB} = \pi - \theta$이므로 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2} \times (\pi - \theta)$이다.

2. $\triangle \mathrm{OCD}$의 넓이를 구하기 위해 $\overline{\mathrm{OD}}$와 $\overline{\mathrm{BC}}$의 길이를 구하자.
   원의 중심 O에서 접점 A를 긋고 직각 표시를 하자.

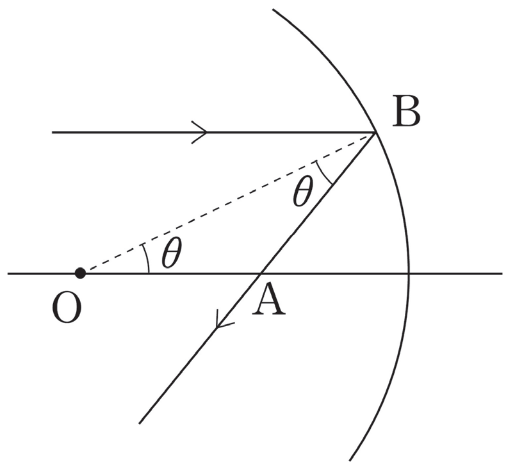
   $\overline{\mathrm{OD}} = \frac{1}{\cos(\pi - \theta)} = \frac{-1}{\cos\theta}$, $\overline{\mathrm{BC}} = \tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$ 이다.

   $\triangle \mathrm{OCD}$의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \frac{-1}{\cos\theta} \times (-\tan\theta) = \frac{\sin\theta}{2\cos^2\theta}$이다.

   따라서 어두운 부분의 넓이는 $\frac{\sin\theta}{2\cos^2\theta} - \frac{1}{2}(\pi - \theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} - \pi + \theta\right)$

08 03학년도 수능 인문계 9번

답 : ①



입사된 빛과 구면이 만나는 점을 B라고 하자. $\angle \mathrm{BOA}$는 입사각과 엇각이므로 θ이다.
$\angle \mathrm{OBA}$는 반사각이므로 θ이다. 따라서 $\triangle \mathrm{OAB}$는 이등변삼각형이다.

$R = \overline{\mathrm{OB}} = 2\overline{\mathrm{OA}}\cos\theta$ 이므로 $\overline{\mathrm{OA}} = \frac{R}{2\cos\theta}$이다.

09 20학년도 수능 가형 7번

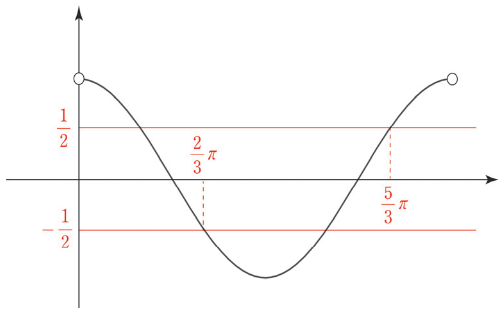
답 : ②

1. $4\cos^2 x - 1 = 0$에서 $\cos x = \frac{1}{2}$ or $\cos x = -\frac{1}{2}$이다.

2. $\sin x \cos x < 0$에서 $\sin x$와 $\cos x$의 부호가 반대이려면 동경이 제2 사분면과 제4 사분면에 존재해야 한다.

   따라서 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$이다.

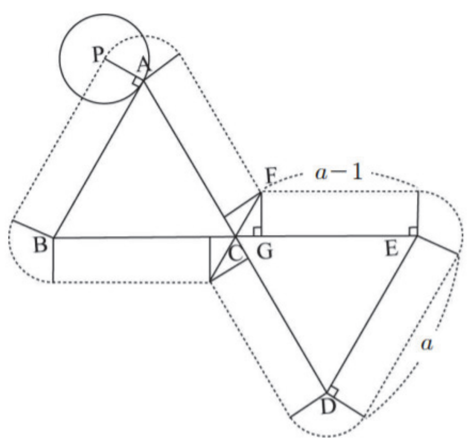
   이제 $y = \cos x$의 그래프와 두 직선 $y = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$의 그래프를 그려보자.



$x = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$이므로 모든 x의 값의 합은 $\frac{7}{3}\pi$이다.

10 08년 6월 교육청 고2 가형 18번

답 : ②



원 P를 굴려보며 원 P의 중심의 자취를 표시하면 위와 같다.

$\overline{\mathrm{FG}} = \sqrt{3}$, $\angle \mathrm{FCG} = \frac{\pi}{3}$이므로 $\overline{\mathrm{CG}} = \frac{\sqrt{3}}{\tan\frac{\pi}{3}} = 1$이다. 따라서 $\overline{\mathrm{GE}} = a - 1$이다.

따라서 원 P의 중심이 움직인 거리는 $2 \times a + 4 \times (a-1) + 4 \times \sqrt{3} \times \frac{2\pi}{3} = 6a - 4 + \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$이다.

$6a - 4 = 23$이므로 $6a = 27$, $a = \frac{9}{2}$이다.