수학 영역(나형)

2021학년도 6월 평가원 모의고사 대비로 평가원 기출 문항들 위주의 REBUILD 문제들로 만들어 보았습니다.
그동안 기출을 얼마나 열심히 풀었고 분석하였는지 확인하실 수 있을 거라 생각됩니다. 시험 치르기 전 꼭 풀어보시고 틀린 문항은 원 문항을 찾아서 다시 복습해 보시길 바랍니다.
좋은 결과 있길 바랍니다!

6월 모평 이후 2021학년도 대비 어썸&랑데뷰 최고난도 모의고사가 발간될 예정입니다.

이투스 정현경
송원학원 황보백

5지선다형

1. $3^{-2}\times 9^{2}$의 값은? [2점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

2. $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^5-3x^3+6)\,dx$의 값은? [2점]

① 16 ② 15 ③ 14 ④ 13 ⑤ 12

3. ${}_4P_2+{}_4C_2+{}_2\Pi_4$의 값은? [2점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

4. 두 사건 A, B가 서로 독립사건이고,

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{6},\ \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{5}{6}$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

5. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{10} a_n = 10$일 때, $\sum_{n=1}^{10} (2a_n - 1)$의 값은? [3점]

① 2 ② 6 ③ 10 ④ 20 ⑤ 38

6. 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_8 = 51$일 때, a_3의 값은? [3점]

① $\frac{4}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{10}$ ⑤ $\frac{1}{20}$

7. 실수 x에 대하여 $3^{\frac{x}{2}} = 2$일 때, $2^{\frac{4}{x}}$의 값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 9 ④ 16 ⑤ 27

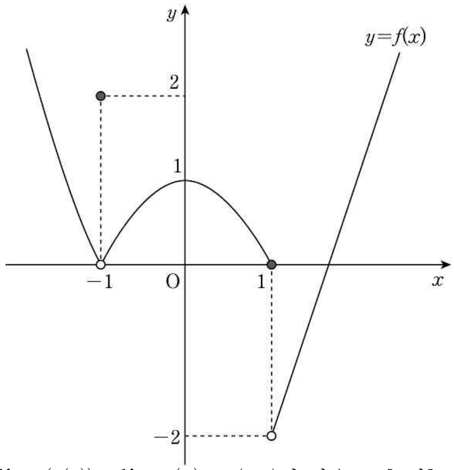
8. $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^8$의 전개식에서 x^4의 계수는? [3점]

① 106 ② 108 ③ 110 ④ 112 ⑤ 114

9. 함수 $f(x)=x^3-12x+a$의 극댓값이 17일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

10. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



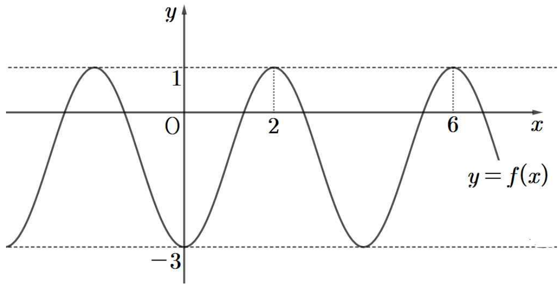
$\lim\limits_{x\to 0} f(f(x))+\lim\limits_{x\to 1+} f(x)+f(-1)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

11. 한 개의 주사위를 세 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c라 할 때, $a \le b$ 또는 $a \le c$일 확률은? [3점]

① $\frac{55}{216}$ ② $\frac{85}{216}$ ③ $\frac{121}{216}$ ④ $\frac{151}{216}$ ⑤ $\frac{161}{216}$

12. 함수 $f(x)=a\cos\frac{\pi(x+b)}{2}-1$의 그래프가 그림과 같다. 두 양수 a, b에 대하여 $a\times b$가 6의 배수일 때, $a+b$의 최솟값은? [3점]



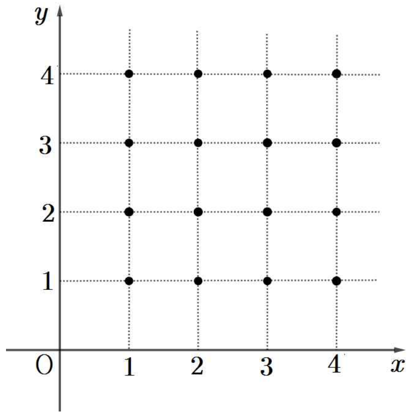
[2019년 11월 실시 고2 수학 나형 27번]-변형

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

13. 다음 조건을 만족시키는 좌표평면 위의 점 (a, b)중에서 임의로 서로 다른 두 점을 선택할 때, 선택된 두 점 사이의 거리가 1보다 클 확률은? [3점]

(가) a, b는 자연수이다. (나) $1 \le a \le 4$, $1 \le b \le 4$

① $\frac{31}{40}$ ② $\frac{47}{60}$ ③ $\frac{95}{120}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{97}{120}$



[2020학년 9월 평가원 나형 14번]-변형

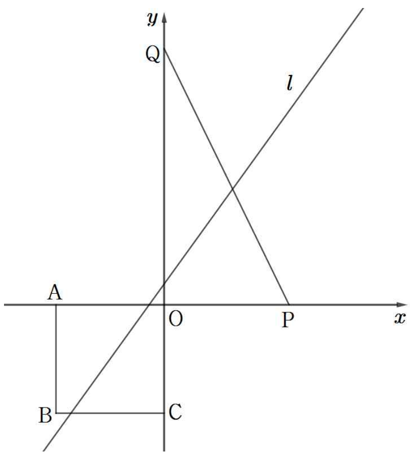
14. 자연수 n의 양의 약수의 개수를 $f(n)$이라 하고, 24의 모든 양의 약수를 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_8라 하자.

$\sum_{k=1}^{8} \left\{(-1)^{f(a_k)} \times \log a_k\right\}$의 값은? [4점]

① $\log 2 + \log 3$ ② $2\log 2 + \log 3$
③ $3\log 2 + 5\log 3$ ④ $5\log 2 + 2\log 3$
⑤ $8\log 2 + 4\log 3$

[2020학년도 11월 수능 나형 17번]-변형

15. 그림과 같이 네 점 O$(0, 0)$, A$(-2, 0)$, B$(-2, -2)$, C$(0, -2)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형 OABC와 양수 t에 대하여 점 P$(t, 0)$, Q$(0, 2t)$가 있다. 정사각형 OABC의 두 변 OA, BC와 모두 만나는 직선 l이 정사각형 OABC와 직각삼각형 OPQ의 넓이를 각각 이등분 한다. 직선 l의 기울기를 $f(t)$이라 할 때, $\lim_{t\to\infty} f(t)$의 값은? [4점]



① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

[2020년 3월 모의고사 가형 20번]-변형

16. 한 개의 주사위를 네 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c, d라 하자. 네 수 a, b, c, d의 곱 $a\times b\times c\times d$가 18일 확률은? [4점]

① $\frac{1}{36}$ ② $\frac{1}{42}$ ③ $\frac{1}{48}$ ④ $\frac{1}{54}$ ⑤ $\frac{1}{60}$

[2020학년 6월 평가원 나형 16번]-변형

17. 최고차항의 계수가 양수이고 상수항과 계수가 모두 정수인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f\left(\frac{3}{2}\right)$의 최솟값은? [4점]

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)g(x)}{x^4} = 2$

(나) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)g(x)}{2x^2} = 4$

(다) $y = f(x)g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수는 2이다.

① $-\frac{9}{4}$ ② -2 ③ $-\frac{7}{4}$ ④ $-\frac{3}{2}$ ⑤ -1

[2020학년도 11월 수능 나형 14번]-변형

18. 양의 실수 k 에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ kx & (x > 0) \end{cases}$$

이다. 함수 $g(x)$를
$g(x) = f(x) - f(x-1) - f(x-2) + f(x-4)$라 정의하자.
$\int_0^4 g(x)dx = 12$일 때, k의 값은? [4점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

[2018학년도 9월 모평 나형 30번]-변형

19. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{3a_n+1}{2} & (a_n\text{이 홀수}) \\ \dfrac{a_n}{2} & (a_n\text{이 짝수})\end{cases} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

으로 정의된다. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

| 보 기 |

ㄱ. $a_1=3$이면 $a_{2018}=1$이다.
ㄴ. $a_1=8k+1$이면 $a_1<a_4$이다.
(단, $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$)
ㄷ. $a_2=3$이면 $a_1>a_2$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2017학년도 6월 모평 나형 20번 변형]

20. 자연수 n에 대하여 $3a+3b+c+d=3n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 (a,b,c,d)의 개수를 a_n이라 하자. 다음은 $\sum_{n=1}^{7}a_n$의 값을 구하는 과정이다.

음이 아닌 정수 $a,b,\ c,d$가
$3a+3b+c+d=3n$을 만족시키려면 음이 아닌 정수 k에 대하여 $c+d=3k$이어야 한다.
$c+d=3k$인 경우는 (1) 음이 아닌 정수 $k_1,\ k_2$에 대하여 $c=3k_1,\ d=3k_2$인 경우이거나 (2) 음이 아닌 정수 $k_3,\ k_4$에 대하여 $c=3k_3+1,\ d=3k_4+2$인 경우 또는 (3) 음이 아닌 정수 $k_5,\ k_6$에 대하여
$c=3k_5+2,\ d=3k_6+1$인 경우이다.
(1) $c=3k_1,\ d=3k_2$인 경우 :
$3a+3b+c+d=3n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a,b,c,d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,c,d)$개수는
$\boxed{(가)}$ 이다.
(2) $c=3k_3+1,\ d=3k_4+2$인 경우 :
$3a+3b+c+d=3n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a,b,c,d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,c,d)$개수는
$\boxed{(나)}$ 이다.
(3) $c=3k_5+2,\ d=3k_6+1$인 경우 :
(2)와 같은 경우의 수를 가지므로 $\boxed{(나)}$ 이다.
(1), (2), (3)에 의하여 $3a+3b+c+d=3n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a,b,c,d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,c,d)$의 개수 a_n은

$$a_n=\boxed{(가)}+2\times\boxed{(나)}$$

이다. 자연수 m에 대하여

$$\sum_{n=1}^{m}\boxed{(나)}={}_{m+3}\mathrm{C}_4$$

이므로 $\sum_{n=1}^{7}a_n=\boxed{(다)}$ 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n),\ g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 r이라 할 때, $f(5)+g(6)+r$의 값은? [4점]

① 793 ② 818 ③ 843 ④ 861 ⑤ 893

[2019학년도 6월 모평 나형 20번 변형]

21. 구간 $[0,\ 3]$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}-4x(x-1) & (0 \le x < 1) \\ -(x-1)(x-3) & (1 \le x \le 3)\end{cases}$$

이다. 실수 a $(0 \le a \le 1)$에 대하여

$\int_{a}^{a+2} f(x)\,dx$의 최댓값은? [4점]

① $\frac{20}{27}$　② $\frac{10}{9}$　③ $\frac{40}{27}$　④ $\frac{40}{27}$　⑤ $\frac{50}{27}$

[2017학년도 9월 모평 나형 29번]-변형

단답형

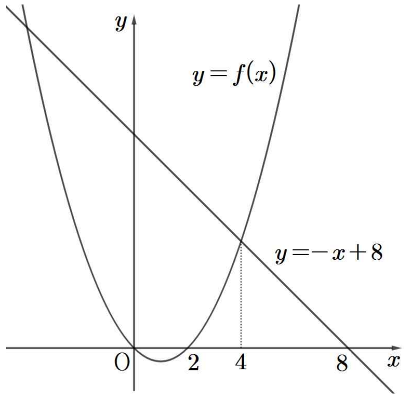
22. 4개의 숫자 $1, 2, 3, 4$를 중복 사용하여 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수의 개수를 구하시오. [3점]

23. 함수 $f(x)=-4x^4+7x^2+16$에 대하여 $f'(-1)$의 값을 구하시오. [3점]

24. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+8$이 그림과 같을 때, 부등식

$$\log_2 f(x)+\log_{\frac{1}{2}}(8-x)\ge 0$$

을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]
(단, $f(0)=f(2)=0$, $f(4)=4$)



[2020학년 6월 평가원 가형 24번]-변형

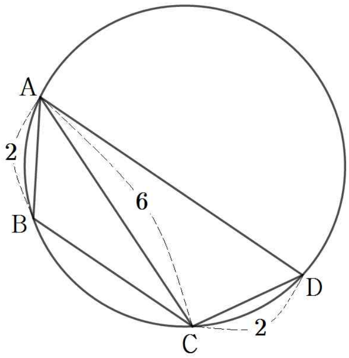
25. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t\ge 0)$에서의 위치 x가

$$x=-t^3+6t^2+at+b\ (a, b\text{는 상수})$$

이다. 점 P의 가속도가 0일 때, 점 P의 속도와 위치가 모두 20이다. $a-b$의 값을 구하시오. [3점]

[2019학년도 11월 수능 27번]-변형

26. 그림과 같이 반지름의 길이가 4인 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여 $\overline{AB}=\overline{CD}=2$, $\overline{AC}=6$일 때, 사각형 ABCD의 넓이를 S라 하자. $\frac{16}{15}S^2$의 값을 구하시오. [4점]

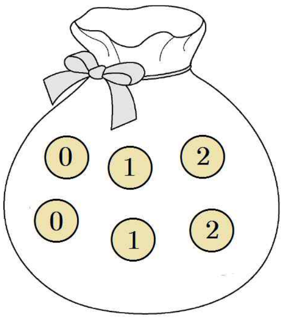


[2019년 11월 실시 고2 수학 가형-27번, 나형 29번]-변형

27. 숫자 0, 0, 1, 1, 2, 2이 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 한 개의 공을 임의로 꺼내어 공에 적힌 수를 확인한 후 다시 넣지 않는다. 이와 같은 시행을 6번 반복할 때, k $(1 \le k \le 6)$번째 꺼낸 공에 적힌 수를 a_k라 하자. 두 자연수 m, n을

$$m = a_1 + a_2 \times 10 + a_3 \times 100$$
$$n = a_4 + a_5 \times 10 + a_6 \times 100$$

이라 할 때, $m \ge n$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

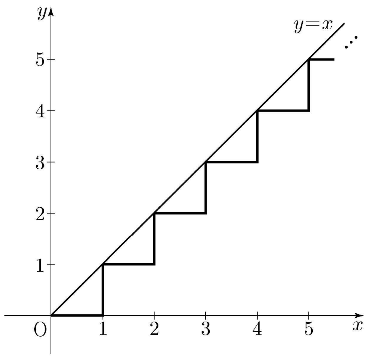


[2020학년 6월 평가원 가형 27번]-변형

28. 좌표평면에서 그림과 같이 길이가 1인 선분이 수직으로 만나도록 연결된 경로가 있다. 이 경로를 따라 원점에서 멀어지도록 움직이는 점 P의 위치를 나타내는 점 A_n을 다음과 같은 규칙으로 정한다.

> (i) A_0은 원점이다.
> (ii) n이 자연수일 때, A_n은 점 A_{n-1}에서 점 P가 경로를 따라 $\frac{2n-1}{49}$ 만큼 이동한 위치에 있는 점이다.

예를 들어, 점 A_2와 A_8의 좌표는 각각 $\left(\frac{4}{49},\ 0\right)$, $\left(1,\ \frac{15}{49}\right)$ 이다. 자연수 n에 대하여 A_n 중 직선 $y=x$ 위에 있는 점을 원점에서 가까운 순서대로 나열할 때, 세 번째 점은 A_m이고 A_m의 x좌표를 a라 하자. $m+a$의 값을 구하시오. [4점]



[2019학년도 9월 모평 나형 29번 변형]

29. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2, x_3, x_4의 모든 순서쌍 (x_1, x_2, x_3, x_4)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $n=1$, 2, 3일 때, $x_{n+1}-x_n \geq 2$
(나) $x_2 \geq 6$, $x_4 \leq 15$

[2020학년 6월 평가원 나형 29번]-변형

30. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)+x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
(나) 방정식 $f(x)-2x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

$f(0)=0$, $f'(2)=-1$일 때, $f(12)$의 최댓값을 구하시오. [4점]

[2020학년도 11월 수능 수학 나형 30번]-변형

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.

1	2	3	4	5
③	⑤	③	⑤	③
6	7	8	9	10
①	③	④	⑤	③
11	12	13	14	15
⑤	②	④	⑤	①
16	17	18	19	20
④	①	④	⑤	④
21	22	23	24	25
③	340	2	22	20
26	27	28	29	30
80	23	60	350	888

문항	배점	수학1	확률과통계	수학2
1	2	1단원		
2	2			3단원
3	2		1단원	
4	3		2단원	
5	3	4단원		
6	3	4단원		
7	3	1단원		
8	3		1단원	
9	3			2단원
10	3			1단원
11	3		1단원	
12	3	3단원		
13	3		2단원	
14	4	1단원		
15	4			1단원
16	4		2단원	
17	4			1단원
18	4			3단원
19	4	4단원		
20	4		1단원	
21	4			3단원
22	3		1단원	
23	3			2단원
24	3	2단원		
25	3			2단원
26	4	3단원		
27	4		2단원	
28	4	4단원		
29	4		1단원	
30	4			2단원
문항수		10	10	10

1) 정답 ③

2) 정답 ⑤

3) 정답 ③

4) 정답 ⑤

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{5}{6}$에서 $\mathrm{P}(B)=x$라 하면

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\frac{5}{6}=\frac{1}{6}+x-\frac{1}{6}x$

$\frac{5}{6}x=\frac{4}{6}$에서 $x=\frac{4}{5}$

5) 정답 ③

$\sum_{n=1}^{10}(2a_n-1)=2\sum_{n=1}^{10}a_n-\sum_{n=1}^{10}1$에서 $\sum_{n=1}^{10}a_n=10$이므로

$=20-10=10$

6) 정답 ①

$S_9=\frac{a_1(2^8-1)}{2-1}=a_1(2^8-1)=255a_1=51$이므로

$a_1=\frac{51}{255}=\frac{1}{5}$

따라서 $a_3=\frac{1}{5}\times 2^2=\frac{4}{5}$

7) 정답 ③

$3^{\frac{x}{2}}=2$

$2^{\frac{4}{x}}=3^{\frac{x}{2}\times\frac{4}{x}}=3^2=9$

8) 정답 ④

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$\left(x-\frac{2}{x}\right)^8$의 전개식의 일반항은

${}_8\mathrm{C}_r x^{8-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r={}_8\mathrm{C}_r(-2)^r x^{8-2r}$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$

이때, $8-2r=4$에서

$r=2$

따라서 x^4의 계수는

${}_8\mathrm{C}_2(-2)^2=\frac{8\times 7}{2\times 1}\times 4=112$

9) 정답 ⑤

$f(x)=x^3-12x+a$에서

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대, $x=2$에서 극소이다.

이때, 함수 $f(x)$의 극댓값이 17이므로

$f(-2)=-8+24+a=17$

따라서 $a=1$

10) 정답 ③

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$\lim_{x\to 0}f(f(x))+\lim_{x\to 1+}f(x)+f(-1)$

$=\lim_{t\to 1-}f(t)+(-2)+2=0$

11) 정답 ⑤

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

여사건의 확률을 이용하자.

$a\le b$ 또는 $a\le c$의 여사건은 $a>b$ 이고 $a>c$의 경우의 수를 구해보면

$a=1$일 때, 0가지

$a=2$일 때, b, c 각 1가지 ⇨ $1\times 1=1$

$a=3$일 때, b, c 각 2가지 ⇨ $2\times 2=4$

$a=4$일 때, b, c 각 3가지 ⇨ $3\times 3=9$

$a=5$일 때, b, c 각 4가지 ⇨ $4\times 4=16$

$a=6$일 때, b, c 각 5가지 ⇨ $5\times 5=25$

따라서

$1-\frac{1+4+9+16+25}{216}=\frac{161}{216}$

12) 정답 ②

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

함수 $f(x)=a\cos\frac{\pi(x+b)}{2}-1$에서

최댓값은 $a-1=1$이고 최솟값은 $-a-1=-3$이므로 $a=2$

따라서 $f(x)=2\cos\frac{\pi(x+b)}{2}-1$에서

$(2,1)$를 지나므로 대입하면

$f(2)=2\cos\frac{\pi(2+b)}{2}-1=1$

$\cos\frac{\pi(2+b)}{2}=1$

n이 정수 일 때, $\cos 2n\pi=1$에서 b가 양수이므로 $n=1$일 때, 양수 b의 최솟값은 2이다.

그런데 $a\times b$가 6의 배수이므로 b의 최솟값은 6이다.

$a+b$의 최솟값은 8

13) 정답 ④
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

전체 경우의 수 ${}_{16}C_2=\frac{16\times15}{2\times1}=120$

한 점을 선택했을 때, 그 점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원을 그리자.
원 위의 점에 포함되는 점의 개수를 센 뒤 전체 경우의 수에서 제외하면 선택된 두 점 사이의 거리는 1보다 커지게 된다.
예를 들어 $(1,1)$이 원의 중심일 때, $(2,1)$과 $(1,2)$는 $(1,1)$과 거리가 1인 점이다.
(i) $y=1$일 때, $2+3+3+2=10$
(ii) $y=2$일 때, $3+4+4+3=14$
(iii) $y=3$일 때, $3+4+4+3=14$
(iv) $y=4$일 때, $2+3+3+2=10$
거리가 1인 두 점을 선택하는 경우의 수는 48가지다.
그런데 $(1,1)$이 중심일 때, $(1,2)$가 선택되고 $(1,2)$가 중심일 때, $(1,1)$가 선택되므로 두 번씩 중복된다. 제외되는 경우의 수는 24이다.
따라서
$1-\frac{24}{120}=\frac{4}{5}$

14) 정답 ⑤
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

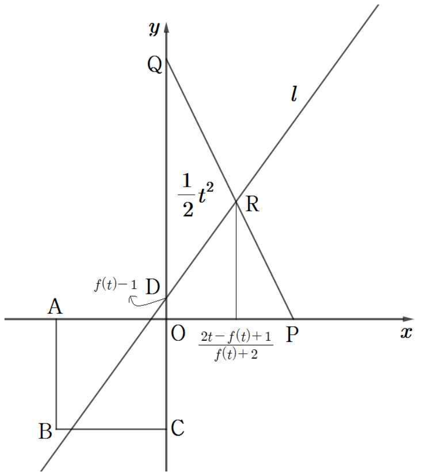
$24=2^3\times3$이고 모든 양의 약수를 크기가 작은 순으로 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_8라 하자.

k	a_k	$f(a_k)$
1	$a_1=1$	1
2	$a_2=2$	2
3	$a_3=3$	2
4	$a_4=4$	3
5	$a_5=6$	4
6	$a_6=8$	4
7	$a_7=12$	6
8	$a_8=24$	8

$\sum_{k=1}^{8}\left\{(-1)^{f(a_k)}\times\log a_k\right\}$
$=0+\log2+\log3-\log4+\log6$
$\quad+\log8+\log12+\log24$
$=\log\left(\frac{2\times3\times6\times8\times12\times24}{4}\right)$
$=8\log2+4\log3$

15) 정답 ①
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

직선 l이 정사각형 OABC의 넓이를 이등분하므로 정사각형 OABC의 두 대각선의 교점 $(-1,-1)$을 지난다.
따라서 l : $y=f(t)(x+1)-1\rightarrow y=f(t)x+f(t)-1$
직선 l이 y축과 만나는 점 $\mathrm{D}(0, f(t)-1)$이다.
따라서 $\overline{\mathrm{DQ}}=2t-f(t)+1$
직선 PQ은 기울기가 -2이므로 $y=-2x+2t$이다.
$y=-2x+2t$와 직선 l의 교점을 R이라 하자.
$-2x+2t=f(t)x+f(t)-1$에서
$\{f(t)+2\}x=2t-f(t)+1$
따라서 점 R의 x좌표는 $\frac{2t-f(t)+1}{f(t)+2}$이다.
직각삼각형 OPQ의 넓이가 $\frac{1}{2}\times t\times2t=t^2$이므로
삼각형 DRQ의 넓이는 $\frac{1}{2}t^2$이다.



$\frac{1}{2}\times\{2t-f(t)+1\}\times\frac{2t-f(t)+1}{f(t)+2}=\frac{1}{2}t^2$
$\{2t-f(t)+1\}^2=t^2\{f(t)+2\}$
$\{f(t)\}^2-2(2t+1)f(t)+(2t+1)^2=t^2f(t)+2t^2$
$\{f(t)\}^2-\left(t^2+4t+2\right)f(t)+2t^2+4t+1=0$
$f(t)=\frac{t^2+4t+2\pm\sqrt{\left(t^2+4t+2\right)^2-4\left(2t^2+4t+1\right)}}{2}$
$=\frac{t^2+4t+2\pm\sqrt{t^4+8t^3+12t^2+8t}}{2}$
점 Q와 점 P에서 $f(t)<2t+1$이므로
$f(t)=\frac{t^2+4t+2-\sqrt{t^4+8t^3+12t^2+8t}}{2}$
$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{4\left(2t^2+4t+1\right)}{2\left\{t^2+4t+2+\sqrt{t^4+8t^3+12t^2+8t}\right\}}=2$

16) 정답 ④
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$18=2\times3^2$이다.
한 개의 주사위를 네 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c, d를 순서쌍으로 나타내면 (a, b, c, d)이므로 18이 나올 수 있는 경우는 다음과 같다.
$(1, 1, 3, 6)$, $(1, 2, 3, 3)$
으로 나올 수 있는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!}\times2=24$
모든 경우의 수는 6^4이므로
구하고자 하는 확률은 $\dfrac{24}{6^4}=\dfrac{4}{6^3}=\dfrac{1}{54}$

17) 정답 ①
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

조건 (가), (나)에 의하여
$f(x)g(x)=2x^4+ax^3+8x^2$ (a는 상수)
로 놓을 수 있다.
$f(x)g(x)=x^2(2x^2+ax+8)$에서
조건 (다)에 의하여
$2x^2+ax+8=0$은 중근을 가진다.
따라서 $D=a^2-64=0$에서 $a=\pm8$
따라서 $f(x)g(x)=2x^2(x^2\pm4x+4)$
$f(x)g(x)=2x^2(x+2)^2$ 또는 $f(x)g(x)=2x^2(x-2)^2$
이때 $f(1)$가 최소는 $f(x)$의 인수에 $(x-2)$가 포함되야 하므로
$f_1(x)=2x(x-2)$또는 $f_2(x)=2x^2(x-2)$중 하나에서 생긴다.
$f_1\left(\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{3}{2}$, $f_2\left(\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{9}{4}$
따라서 $f(2)$의 최솟값은 $-\dfrac{9}{4}$이다.

18) 정답 ④
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

주어진 함수 $g(x)$를 $x=1$와 $x=2$를 기준으로 구간을 나누어 정의해 보면
$f(x)=\begin{cases}0 & (x\le0)\\ kx & (x>0)\end{cases}$, $f(x-1)=\begin{cases}0 & (x\le1)\\ k(x-1) & (x>1)\end{cases}$,
$f(x-2)=\begin{cases}0 & (x\le2)\\ k(x-2) & (x>2)\end{cases}$, $f(x-4)=\begin{cases}0 & (x\le4)\\ k(x-4) & (x>4)\end{cases}$
(i) $x\le0$일 때
$g(x)=f(x)-f(x-1)-f(x-2)+f(x-4)$
$\quad=0-0-0+0=0$
(ii) $0<x\le1$일 때
$g(x)=f(x)-f(x-1)-f(x-2)+f(x-4)$
$\quad=kx-0-0+0=kx$
(iii) $1<x\le2$일 때
$g(x)=f(x)-f(x-1)-f(x-2)+f(x-4)$
$\quad=kx-k(x-1)-0+0=k$
(iv) $2<x\le4$일 때
$g(x)=f(x)-f(x-1)-f(x-2)+f(x-4)$
$\quad=kx-k(x-1)-k(x-2)+0=-kx+3k$
(iv) $x>4$일 때
$g(x)=f(x)-f(x-1)-f(x-2)+f(x-4)$
$\quad=kx-k(x-1)-k(x-2)+k(x-4)=-k$
따라서
$$h(x)=\begin{cases}0 & (x\le0)\\ kx & (0<x\le1)\\ k & (1<x\le2)\\ -kx+3k & (2<x\le4)\\ -k & (x>4)\end{cases}$$
$\displaystyle\int_0^4 g(x)dx=\frac{(1+3)\times k}{2}+\left(-\frac{1}{2}\times1\times k\right)$
$\quad=2k-\dfrac{1}{2}k=\dfrac{3}{2}k$
⇦ $0<x\le3$일 때, x축 위쪽에서 윗변의 길이 1, 아랫변의 길이 3, 높이가 k인 사다리꼴의 넓이이다.
⇦ $3<x\le4$일 때, 밑변의 길이 1, 높이가 k인 직각삼각형이다.
따라서
$\dfrac{3}{2}k=12$에서 $k=8$

19) 정답 ⑤
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

ㄱ. $a_1=3$을 주어진 점화식에 대입하면
$a_2=5$, $a_3=8$, $a_4=4$, $a_5=2$, $a_6=1$, $a_7=2$, $a_8=1$, $\cdots$
즉, 다섯 번째 항부터 2와 1이 반복됨을 알 수 있다.
$\therefore$ $a_{2018}=1$ (참)
ㄴ. $a_1=8k+1$이면
$a_2=\dfrac{3(8k+1)+1}{2}=12k+2$
$a_3=\dfrac{12k+2}{2}=6k+1$
$a_4=\dfrac{3(6k+1)+1}{2}=\dfrac{18k+4}{2}=9k+2$
$a_1<a_4$ (참)
ㄷ. a_1이 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 생각해본다.
(i) a_1이 홀수일 때, $\dfrac{3a_1+1}{2}=3$에서 $a_1=\dfrac{5}{3}$이므로 모순이다.
(ii) a_1이 짝수일 때, $\dfrac{a_1}{2}=3$에서 $a_1=6$
(i),(ii)에서 $a_1=6$ 이므로 $a_1>a_2$이다. (참)
따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

20) 정답 ④
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

(1) $c=3k_1$, $d=3k_2$을 $3a+3b+c+d=3n$에 대입하면,

$3a+3b+3k_1+3k_2=3n$에서 $a+b+k_1+k_2=n$를 만족하는 음이 아닌 정수의 순서쌍의 개수는 ${}_4\mathrm{H}_\mathrm{n}$이다.

(가) ${}_4\mathrm{H}_\mathrm{n}$ 에서 $f(5)={}_4\mathrm{H}_5={}_8\mathrm{C}_3=56$ … ①

(2) $c=3k_3+1$, $d=3k_4+2$을 $3a+3b+c+d=3n$에 대입하면,
$3a+3b+3k_3+3k_4=3n-3$에서
$a+b+k_3+k_4=n-1$를 만족하는
음이 아닌 정수의 순서쌍의 개수는 ${}_4\mathrm{H}_{\mathrm{n}-1}$이다.

(나) ${}_4\mathrm{H}_{\mathrm{n}-1}$ 에서 $g(6)={}_4\mathrm{H}_5={}_8\mathrm{C}_3=56$… ②

(3) $c=3k_5+2$, $d=3k_6+1$을 $3a+3b+c+d=3n$에 대입하면,
$3a+3b+3k_5+3k_6=3n-3$에서
$a+b+k_5+k_5=n-1$를 만족하는
음이 아닌 정수의 순서쌍의 개수는 ${}_4\mathrm{H}_{\mathrm{n}-1}$이다.

$$\sum_{n=1}^{m}(\text{나})=\sum_{n=1}^{m}{}_4\mathrm{H}_{\mathrm{n}-1}$$
$$={}_3\mathrm{C}_3+{}_4\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{\mathrm{m}+2}\mathrm{C}_3={}_{\mathrm{m}+3}\mathrm{C}_4$$
에서
$$\sum_{n=1}^{m}(\text{가})=\sum_{n=1}^{m}{}_4\mathrm{H}_\mathrm{n}$$
$$={}_4\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{\mathrm{m}+3}\mathrm{C}_3={}_{\mathrm{m}+4}\mathrm{C}_4-1$$
임을 알 수 있다.

따라서, $\sum_{n=1}^{7}a_n={}_{11}\mathrm{C}_4-1+2\times{}_{10}\mathrm{C}_4=749$이다.

$r=749$ … ③
①, ②, ③에 의해
$f(5)+g(6)+r=56+56+749=861$

21) 정답 ③
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$f_1(x)=-4x(x-1)$, $f_2(x)=-(x-1)(x-3)$라 할 때
임의의 실수 a에 대하여
$S(a)=\int_a^{a+2}f(x)\,dx$라 하면
$S'(a)=f(a+2)-f(a)$이고
$S'(a)=0$ 즉, $f(a+2)=f(a)$일 때 극댓값이면서 최댓값을 갖는다.
즉, $f_2(a+2)=-(a+1)(a-1)$, $f_1(a)=-4a(a-1)$에서
$f_2(a+2)=f_1(a)$일 때이므로
$-(a+1)(a-1)=-4a(a-1)$⇨$-a-1=-4a$→
$\therefore\ a=\frac{1}{3}$
따라서
$$S\left(\frac{1}{3}\right)=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{7}{3}}f(x)\,dx$$
$$=\int_{\frac{1}{3}}^{1}(-4x^2+4x)\,dx+\int_1^{\frac{7}{3}}(-x^2+4x-3)\,dx$$
$$=\left[-\frac{4}{3}x^3+2x^2\right]_{\frac{1}{3}}^{1}+\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^{\frac{7}{3}}$$
$$=\frac{40}{81}+\frac{80}{81}=\frac{120}{81}=\frac{40}{27}$$

22) 정답 340
4개의 숫자 1, 2, 3, 4를 중복 사용하여 만들 수 있는 n자리의 자연수의 개수는 서로 다른 4개에서 n개를 택하는 중복순열의 수이므로
${}_4\Pi_n=4^n$
따라서 구하는 네 자리 이하의 자연수의 개수는
$4^1+4^2+4^3+4^4=4+16+64+256$
$=340$

23) 정답 2
$f(x)=-4x^4+7x^2+16$
$f'(x)=-16x^3+14x\rightarrow f'(-1)=16-14=2$

24) 정답 22
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

로그가 정의되기 위한 x범위는
$f(x)>0$ ⇨ $x<0$, $x>2$
$8-x>0$ ⇨ $x<8$
따라서 $x<0$ 또는 $2<x<8$…㉠

$\log_2 f(x)+\log_{\frac{1}{2}}(8-x)$
$=\log_2 f(x)-\log_2(8-x)$
$=\log_2\frac{f(x)}{8-x}\geq 0$
따라서 $\frac{f(x)}{8-x}\geq 1$⇨$\frac{f(x)}{x-8}\leq 1$
㉠에서 $f(x)\geq x-8$
따라서 만족하는 자연수 x는 4, 5, 6, 7
$4+5+6+7=22$

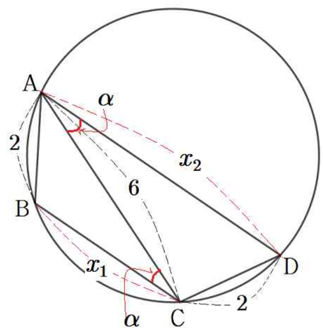
25) 정답 20
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

점 P의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 위치 $x(t)$가
$x(t)=-t^3+6t^2+at+b$
이므로 점 P의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$는
$v(t)=-3t^2+12t+a$

이고, 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 가속도 $a(t)$는
$a(t)=-6t+12$
점 P의 가속도가 0이므로
$-6t+12=0$에서 $t=2$
$t=2$일 때, 점 P의 속도와 위치가 모두 20이므로
$v(2)=-12+24+a=20$
$\therefore\ a=8$
$x(2)=-8+24+16+b=20$
$\therefore\ b=-12$
따라서 $a-b=8-(-12)=20$

26) 정답 81
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

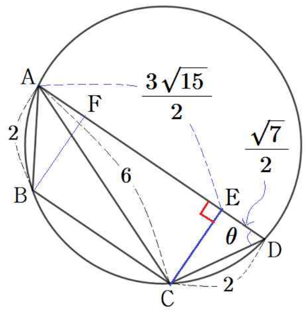
삼각형 ABC에서 $\angle\mathrm{ACB}=\alpha$라 할 때,
삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 4이므로 $\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\alpha}=8$



$\sin\alpha=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$이므로
$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$
$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}$이므로 $\angle\mathrm{ACB}=\angle\mathrm{CAD}=\alpha$이고
$\overline{\mathrm{BC}}=x_1$, $\overline{\mathrm{AD}}=x_2$라 하면
$S=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD}$
$\quad=\dfrac{1}{2}\times x_1\times 6\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\times x_2\times 6\times\dfrac{1}{4}$
$\quad=\dfrac{3}{4}(x_1+x_2)\cdots$㉠
한편, 삼각형 ABC에 코사인 법칙을 적용하면
$2^2=x_1^2+6^2-2\times 6\times x_1\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ 정리하면
$x_1^2-3\sqrt{15}\,x_1+32=0$
마찬가지로 삼각형 ACD에 코사인 법칙을 적용하면
$x_2^2-3\sqrt{15}\,x_2+32=0$
따라서 x_1과 x_2는 이차방정식 $x^2-3\sqrt{15}\,x+32=0$의 두 근이므로
$x_1+x_2=3\sqrt{15}$
㉠에서 $S=\dfrac{3}{4}\times 3\sqrt{15}=\dfrac{9}{4}\sqrt{15}$

$\therefore\ \dfrac{16}{15}S^2=\dfrac{16}{15}\times\dfrac{81\times 15}{16}=81$

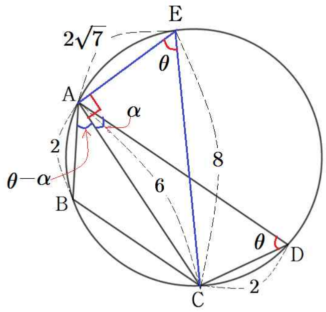
[다른 풀이]-대구 Sumath 장정보t



사각형의 꼭짓점 C, D에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하고 $\angle\mathrm{CDE}=\theta$라 하자. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 4이므로
$\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\theta}=8$에서 $\sin\theta=\dfrac{3}{4}$이다.
따라서 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$
따라서 직각삼각형 DEC에서 $\overline{\mathrm{DE}}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$이고,
$\overline{\mathrm{CE}}=\dfrac{3}{2}$이다.
직각삼각형 CEA에서 $\overline{\mathrm{AE}}=\sqrt{6^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{15}}{2}$
한편, $\triangle\mathrm{AFB}\equiv\triangle\mathrm{DEC}$이므로 $\overline{\mathrm{AF}}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$
따라서 $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{EF}}=\dfrac{3\sqrt{15}-\sqrt{7}}{2}$
사각형 ABCD는 등변 사다리꼴이므로
$S=\dfrac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{BC}})\times\overline{\mathrm{CE}}$
$\quad=\dfrac{1}{2}\times\left\{\dfrac{3\sqrt{15}+\sqrt{7}}{2}+\dfrac{3\sqrt{15}-\sqrt{7}}{2}\right\}\times\dfrac{3}{2}$
$\quad=\dfrac{9\sqrt{15}}{4}$
$\therefore\ \dfrac{16}{15}S^2=\dfrac{16}{15}\times\dfrac{81\times 15}{16}=81$

[다른 풀이]-대구 Sumath 서영만t-덧셈정리 이용

그림과 같이 원의 중심과 사각형의 꼭짓점 C를 지나는 직선이 원과 만나는 점을 E라 하자.
$\angle\mathrm{EAC}=\dfrac{\pi}{2}$이고 $\overline{\mathrm{CE}}=8$, $\overline{\mathrm{AC}}=6$이므로 $\overline{\mathrm{AE}}=2\sqrt{7}$이다.
$\angle\mathrm{AEC}=\theta$라 하면
$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$, $\sin\theta=\dfrac{3}{4}$이고
$\angle\mathrm{CAD}=\alpha$라 하면 $\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin\alpha}=8$에서 $\sin\alpha=\dfrac{1}{4}$



따라서 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$이다.

삼각함수 덧셈정리에서

$\sin(\theta-\alpha)=\dfrac{3\sqrt{15}-\sqrt{7}}{16}$

$\sin(\theta+\alpha)=\dfrac{3\sqrt{15}+\sqrt{7}}{16}$ 이 성립한다.

따라서

$$S=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD}$$
$$=\frac{1}{2}\times2\times6\times\sin(\theta-\alpha)+\frac{1}{2}\times2\times6\times\sin\{\pi-(\theta+\alpha)\}$$
$$=6\{\sin(\theta-\alpha)+\sin(\theta+\alpha)\}$$
$$=6\times\frac{6\sqrt{15}}{16}=\frac{9}{4}\sqrt{15}$$
$$\therefore\ \frac{16}{15}S^2=\frac{16}{15}\times\frac{81\times15}{16}=81$$

27) 정답 23

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

두 자연수 $m,\ n$이 나타내는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!2!2!}=90$이고

$m>n,\ m=n,\ m<n$인 경우만 나타난다.

$m=n$인 경우는 $3!=6$가지이고

$m>n$과 $m<n$은 같은 경우의 수가 나타나므로 각각 $\dfrac{90-6}{2}=42$이다.

따라서 $m\geq n$의 경우의 수는 $42+6=48$

$\dfrac{48}{90}=\dfrac{8}{15}$

$p=15,\ q=8$이므로 $p+q=23$

28) 정답 60

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

계단 모양과 $y=x$의 교점은 x,y값이 자연수이고 →로 움직인 방향의 횟수와 ↑로 움직인 방향의 횟수가 같아야 하므로 A_n 중 직선 $y=x$ 위에 있는 점은 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{49}$의 값이 짝수일 때 나타난다.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{49}=\frac{n^2}{49}=\left(\frac{n}{7}\right)^2$$

$n=14$일 때 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{25}=4$이므로 →:2회, ↑:2회 로 볼 때 $(2,2)$

$n=28$일 때 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{25}=16$이므로 →:8회, ↑:8회 로 볼 때 $(8,8)$

$n=42$일 때 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{25}=36$이므로 →:18회, ↑:18회 로 볼 때 $(18,18)$

$\mathrm{A}_{42}=(18,\ 18)$이다. 따라서 $a=18$이다.

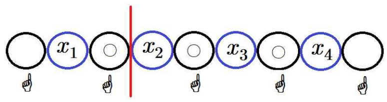
따라서 $m=42,\ a=18$이므로 $m+a=60$

29) 정답 350

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

16개의 공을 일렬로 나열할 때

0이상 15이하의 정수 16개를 다음 그림과 같이 원 안에 넣는 경우를 생각하자.



파란색 원에 들어가는 공에 순서대로 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$를 써 넣고 파란색 공 사이의 원에 각각 1개씩의 공을 넣으면 16개의 공 중 남은 공이 9개 남는다.

남은 9개의 공을 ☝ 표시된 5곳에 넣고 왼쪽부터 0부터 15까지 써 넣으면 문제에서 요구하는 상황이 된다. 그런데, $x_2\geq6$이므로 빨간색 사선을 기준으로 왼쪽 두 개의 ☝에 3개 이상의 공이 들어가야 한다.

따라서 전체 경우의 수에서 왼쪽 두 곳에 0, 1, 2, 3개가 들어가는 경우를 제외하면 되겠다. (3개가 들어가게 되면 x_2보다 작은 수가 $0,1,2,3,4$ 가 되고 $x_2=5$가 된다.)

$${}_5H_9-\left({}_2H_0\times{}_3H_9+{}_2H_1\times{}_3H_8+{}_2H_2\times{}_3H_7+{}_2H_3\times{}_3H_6\right)$$
$$={}_{13}C_9-\left(1\times{}_{11}C_2+2\times{}_{10}C_2+3\times{}_9C_2+4\times{}_8C_2\right)$$
$$={}_{13}C_4-(55+90+108+112)$$
$$=715-365=350$$

[랑데뷰팁]

여사건으로 구하지 않고 바로 계산하면

${}_2H_4\times{}_3H_5+\cdots+{}_2H_9\times{}_3H_0$

즉, $\displaystyle\sum_{n=4}^{9}\left({}_2H_n\times{}_3H_{9-n}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=4}^{9}(n+1)(11-n)(10-n)=350$(계산기 이용함)

[다른 풀이]

(가)에서 $n=1$이면 $x_1 \le x_2-2$
$n=2$이면 $x_2 \le x_3-2$
$n=3$이면 $x_3 \le x_4-2$
$x_4 \le 15$이므로
$x_4=15$이면 $x_3 \le 13$이므로 (x_4, x_3, x_2, x_1)의 순으로
$(15, 13, 11, 0 \to 9)$
$(15, 13, 10, 0 \to 8)$
$(15, 13, 9, 0 \to 7)$
$(15, 13, 8, 0 \to 6)$
$(15, 13, 7, 0 \to 5)$
$(15, 13, 6, 0 \to 4)$
⇨$5+6+7+8+9+10$⇨a

$(15, 12, 10, 0 \to 8)$
$(15, 12, 9, 0 \to 7)$
$(15, 12, 8, 0 \to 6)$
$(15, 12, 7, 0 \to 5)$
$(15, 12, 6, 0 \to 4)$
⇨$5+6+7+8+9$⇨b

$(15, 11, 9, 0 \to 7)$
$(15, 11, 8, 0 \to 6)$
$(15, 11, 7, 0 \to 5)$
$(15, 11, 6, 0 \to 4)$
⇨$5+6+7+8$⇨c

$(15, 10, 8, 0 \to 6)$
$(15, 10, 7, 0 \to 5)$
$(15, 10, 6, 0 \to 4)$
⇨$5+6+7$⇨d

$(15, 9, 7, 0 \to 5)$
$(15, 9, 6, 0 \to 4)$
⇨$5+6$⇨e

$(15, 8, 6, 0 \to 4)$
⇨5⇨f
$x_4=15$일 때는 $a+b+c+d+e+f$
$x_4=14$일 때는 $b+c+d+e+f$
$x_4=13$일 때는 $c+d+e+f$
$x_4=12$일 때는 $d+e+f$
$x_4=11$일 때는 $e+f$
$x_4=10$일 때는 f
이고 $a=45$, $b=35$, $c=26$, $d=18$, $e=11$, $f=5$이다.

모든 순서쌍 (x_1, x_2, x_3, x_4)의 개수는 $a+2b+3c+4d+5e+6f$이므로
따라서 $45+70+78+72+55+30=350$

30) 정답 888
$g(x)=f(x)+x$라 두면
$g(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이다.
$g(0)=0$이고 $g'(x)=f'(x)+1$에서
$g'(2)=f'(2)+1=0$
따라서 $g(x)$는 다음 세 가지 개형을 갖는다.
[삼차함수의 비율 이용]
(i) $g(x)=ax^2(x-3)$일 때, ⇦$x=2$에서 극소
(나)에서
$$f(x)-2x=g(x)-3x=ax^2(x-3)-3x$$
$$=x(ax^2-3ax-3)$$
$ax^2-\frac{3}{2}ax+2=0$은 a값에 관계없이 판별식>0이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다. (모순)
(ii) $g(x)=ax(x-6)^2$일 때, ⇦$x=2$에서 극대
$$f(x)-2x=g(x)-3x=ax(x-6)^2-3x$$
$$=x\{a(x-6)^2-3\}$$
$a(x-6)^2-3=0$의 해가 $x=0$이면 방정식
$f(x)-2x=0$은 $x=0$을 중근으로 가지므로 조건에 만족한다. 따라서 $36a-3=0$에서 $a=\frac{1}{12}$
$$f(x)-2x=x\left\{\frac{1}{12}(x-6)^2-3\right\}$$
$$\therefore\ f(x)=x\left\{\frac{1}{12}(x-6)^2-3\right\}+2x$$
$f(12)=12\times 0+24=24$

(iii) $g(x)=ax(x-2)^2$일 때, ⇦그래프 개형을 생각하면 $f(12)$의 최댓값이 나온다.
$$f(x)-2x=g(x)-3x=ax(x-2)^2-3x$$
$$=x\{a(x-2)^2-3\}$$
$a(x-2)^2-3=0$의 해가 $x=0$이면 방정식
$f(x)-2x=0$은 $x=0$을 중근으로 가지므로 조건에 만족한다. 따라서 $4a-3=0$에서 $a=\frac{3}{4}$
$$f(x)-2x=x\left\{\frac{3}{4}(x-2)^2-3\right\}$$
$$\therefore\ f(x)=x\left\{\frac{3}{4}(x-2)^2-3\right\}+2x$$
$f(12)=12\times 72+24=864+24=888$

[랑데뷰팁]
$g(x)=f(x)+x$에서 $f(x)-2x=g(x)-3x$이므로 (i), (ii), (iii)의 $y=g(x)$와 $y=3x$의 그래프가 접하게 되는 개형은 (ii), (iii)이다.