2020 Square Dream Team

2021학년도 네모의꿈 6월 모의고사 해설

Ⅰ. 제작자 소개

[출제 및 해설] UNIST 수학모의고사팀 네모의꿈

김범호, 전승현, 김태중, 서민수

[검토] UNIST 수학모의고사팀 네모의꿈

한성재, 공나빈, 방세훈, 조인규

Ⅱ. 이용안내

본 모의고사(문제지, 해설지)에 대한 저작권은 UNIST 수학모의고사팀 네모의꿈에 있으며 저작권자의 허락 없이 전부 또는 일부를 상업적으로 이용하거나, 2차적 저작물을 작성하는 등의 저작권을 침해하는 일체의 행위는 금지되어 있습니다. 이를 어길시 저작권법에 의거 처벌받을 수 있습니다.

본 모의고사를 상업적으로 활용할 계획이 있으신 분은 team_dream_of_square@naver.com 으로 연락해주시기 바랍니다.

We are coming back in September!

UNIST Math Mock Team

네모의꿈

01. 정답 : ① (출제자 : 네모의꿈)

[출제의도] Π 의 정의를 알고있는가?

[문항해설]

정의에 따라 계산하면 ${}_6\Pi_2 = 6^2 = 36$이다.

02. 정답 : ① (출제자 : 네모의꿈)

[출제의도] sec의 정의를 알고있는가?

[문항해설]

정의에 따라 계산하면 $\sec\frac{3}{4}\pi = \frac{1}{\cos\frac{3}{4}\pi} = \frac{1}{\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{-\cos\frac{\pi}{4}} = -\sqrt{2}$ 이다.

03. 정답 : ② (출제자 : 네모의꿈)

[출제의도] sec의 정의를 알고있는가?

[문항해설]

$\infty - \infty$꼴이므로 분자, 분모에 $\sqrt{n^2+n+2}+n$을 곱하여 정리하면,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+2}-n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n+2}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n+2}+n\right)}{\sqrt{n^2+n+2}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{\sqrt{n^2+n+2}+n}$$

을 얻는다. 분자, 분모를 n으로 나누면 극한값을 얻을 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{\sqrt{n^2+n+2}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

04. 정답 : ④ (출제자 : 네모의꿈)

[출제의도] 이항계수를 활용하여 다항식의 계수를 구할 수 있는가?

[문항해설]

주어진 식에서 $1+x^2$에는 x항이 없으므로 $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^3$에서 x 또는 $\frac{1}{x}$의 항을 찾으면 된다.

이항계수를 활용하여 각각 ${}_3\mathrm{C}_2(2x)^2\left(-\frac{1}{x}\right)=-12x$ 과 ${}_3\mathrm{C}_1(2x)\left(-\frac{1}{x}\right)^2=\frac{6}{x}$을 얻는다.

따라서 x의 계수는 $-12+6=-6$이 된다.

05. 정답 : ⑤ (출제자 : 네모의꿈)

[출제의도] 등차중항을 활용할 수 있는가?

[문항해설]

등차수열 a_n에 대하여 등차중항을 이용하면 $a_5+a_7=2a_6$을 얻는다. 따라서 $a_6=10$이다.
첫째항을 a, 공차를 d라 하면 $a_6=a+5d=10$이고, 일반항은 $a_n=a+(n-1)d$가 된다.
따라서 구하고자 하는 값은

$$\sum_{n=1}^{11}a_n=\sum_{n=1}^{11}(a+(n-1)d)=11a+d\sum_{n=1}^{11}(n-1)=11a+d\left(\frac{11\times12}{2}-11\right)=11a+55d$$

이므로 답은 110이 된다.

06. 정답 : ③ (출제자 : 네모의꿈)

[출제의도] 음함수의 미분법을 이해하고 있는가?

[문항해설]

주어진 곡선 $\ln(x+y)-xy=1$ 의 양변을 각각 x에 대하여 미분하면,

$$\frac{1+y'}{x+y}-(y+xy')=0$$

이므로 이를 y'에 대하여 정리하면

$$\left(\frac{1}{x+y}-x\right)y'=y-\frac{1}{x+y}$$

를 얻는다. 따라서 $(0,\ e)$를 대입하면 $\frac{1}{e}y'\Big|_{(0,\ e)}=e-\frac{1}{e}$ 에서 $y'|_{(0,\ e)}=e^2-1$이 답이다.

07. 정답 : ⑤ (출제자 : 네모의꿈)

[출제의도] 지수부등식을 풀 수 있는가?

[문항해설]

주어진 부등식의 양변을 밑을 3으로 변환하면

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{x^2-4}=\left(3^{-2}\right)^{x^2-4}=3^{-2x^2+8},\ 27^{1-x}=3^{3(1-x)}=3^{3-3x}$$

가 되고, $3>1$이므로 지수만을 비교해도 대소관계는 유지된다. 따라서 $-2x^2+8\geq 3-3x$를 푸는 것과 동치이다. $2x^2-3x-5=(2x-5)(x+1)\leq 0$에서 $-1\leq x\leq\frac{5}{2}$이므로 모든 정수 x의 값은 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$이고, 따라서 합은 2가 된다.

08. 정답 : ③ (출제자 : 김태중)

[출제의도] 같은 것이 있는 순열을 셀 수 있는가?

[문항해설]

검은색 바둑돌 4개와 흰색 바둑돌 4개 중 6개를 선택하는 경우는 아래 세 가지 뿐이다.

(ⅰ) 검은색 4개, 흰색 2개

(ⅱ) 검은색 3개, 흰색 3개

(ⅲ) 검은색 2개, 흰색 4개

(ⅰ)의 경우는 $\frac{6!}{4!2!}=15$가지이고, (ⅱ)의 경우는 $\frac{6!}{3!3!}=20$가지이다. (ⅲ)은 (ⅰ)과 대칭인 경우이므로 전체 경우의 수는 $15\times 2+20=50$가지이다.

09. 정답 : ④ (출제자 : 김범호)

[출제의도] 샌드위치 정리를 활용할 수 있는가?

[문항해설]

주어진 부등식을 a_n에 대하여 정리하자. 각 항을 $\sqrt{n}$으로 나누면

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{n+4}-\sqrt{n}\right)<\sqrt{a_n}<\frac{2}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$$

이 된다. 좌변을 분모, 분자에 $\sqrt{n+4}+\sqrt{n}$을 곱하여 정리하면

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{4}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}}\right)<\sqrt{a_n}<\frac{2}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$$

을 얻는다. 각 항을 제곱하면

$$\frac{16}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}}\right)^2 < a_n < \frac{4}{n(n+1)}$$

이 된다. 구하고자 하는 값은 $(n-1)^2a_n = n^2a_n - 2na_n + a_n$에 대한 항이므로

(~~출제자의 의도를 생각하며, n^2a_n에 대해서 부등식을 작성해보자.~~)

양변에 n^2을 곱하면

$$16n\left(\frac{1}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}}\right)^2 < n^2a_n < \frac{4n}{n+1}$$

을 얻는다.

좌변과 우변의 식에 각각 $n\to\infty$을 취하면

$$\lim_{n\to\infty}16n\left(\frac{1}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}}\right)^2 = 16\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}}\right)^2 = 16\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{4n}{n+1} = 4$$

을 얻는다. 샌드위치 정리에 의해 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n = 4$가 된다.

다시 말해, na_n, a_n에 대한 수열의 극한은 0으로 수렴한다. ($\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^2} = 0$)

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}(n-1)^2a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2a_n - 2na_n + a_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n - 2\lim\limits_{n\to\infty}na_n + \lim\limits_{n\to\infty}a_n = 4+0+0 = 4$가 답이다.

10. 정답 : ⑤ (출제자 : 김범호)

[출제의도] 삼각함수 덧셈정리를 활용할 수 있는가?

[문항해설]

선분 BP를 연결하면 점 P는 반원 위의 점이므로 $\angle\mathrm{APB} = \frac{\pi}{2}$가 된다. 점 M은 선분 AP를 $1:3$으로 내분하므로 $\overline{\mathrm{MP}} = 3$이 되고, 직각삼각형 ABP에서 $\overline{\mathrm{BP}} = 3$이므로 $\angle\mathrm{BMP} = \frac{\pi}{4}$가 된다.

$\angle\mathrm{BAP} = \alpha$라 놓으면 직각삼각형 ABP에서 $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$임을 알 수 있다.

삼각형의 외각의 성질에 의해 $\angle\mathrm{MBA} + \angle\mathrm{BAM} = \angle\mathrm{BMP}$이므로 $\angle\mathrm{MBA} = \frac{\pi}{4} - \alpha$가 된다.

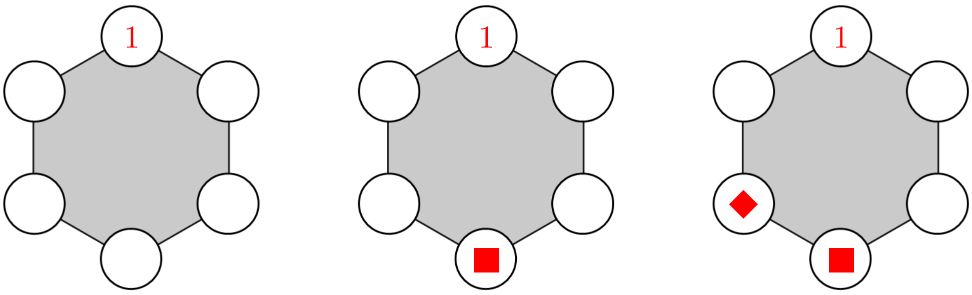
따라서 $\cos(\angle\mathrm{MBA}) = \cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{3}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$가 답이다.

11. 정답 : ②

(출제자 : 김범호)

[출제의도] 여사건을 이해하고, 원순열을 활용할 수 있는가?

[문항해설]
1부터 6까지의 수 중에 합이 7이 되는 쌍은 오직 세 쌍 $(1,\ 6)$, $(2,\ 5)$, $(3,\ 4)$만 존재한다.
회전해서 같은 경우는 한 가지로 세므로, 일반성을 잃지 않고 1을 고정할 수 있다.
적어도 한 개 존재할 확률을 구해야 하므로, 하나도 존재하지 않는 경우를 제외하면 된다.
따라서 1이 마주보는 꼭짓점에는 절대 6이 올 수 없다. (■ $=2,\ 3,\ 4,\ 5$)
남은 4개의 자리에 ■의 쌍이 될 수 있는 □를 제외하고, 남은 한 쌍 중에 해당하는 하나의 수(◆)를 배치한다고 생각하면 역시 마찬가지로 마주보는 꼭짓점에는 ◆의 쌍에 해당하는 ◇는 올 수 없다.



(ⅰ) 1에 마주보는 꼭짓점에 배열하는 ■를 선택하는 경우의 수 : 4가지
(ⅱ) ◆의 자리를 선택하는 경우의 수 : 4가지
(ⅲ) ◆에 마주보는 꼭짓점에 배열하는 수를 선택하는 경우의 수 : 2가지
(ⅳ) 남은 2개의 수를 배열하는 경우의 수 : 2가지

따라서 서로 마주보는 수의 합이 7이 되는 쌍이 존재하지 않는 경우의 수는 $4\times4\times2\times2=64$가지이고,
6개의 수를 배열하는 경우의 수는 $\dfrac{6!}{6}=120$이므로 구하고자 하는 확률은 $1-\dfrac{64}{120}=\dfrac{7}{15}$이 된다.

12. 정답 : ⑤

(출제자 : 전승현)

[출제의도] 홀수항과 짝수항을 나누어 수열의 합을 계산할 수 있는가?

[문항해설]
$\sum_{k=1}^{8}a_k=60$, $\sum_{k=1}^{8}(-1)^k a_k=12$ 에서 $\sum_{k=1}^{8}(a_k+(-1)^k a_k)=\sum_{k=1}^{4}2a_{2k}=72$이고, 따라서 $\sum_{k=1}^{4}a_{2k}=36$이다.
$\sum_{k=1}^{8}(a_k-(-1)^k a_k)=\sum_{k=1}^{4}2a_{2k-1}=48$이고, 따라서 $\sum_{k=1}^{4}a_{2k-1}=24$이다.

$$\therefore \sum_{k=1}^{8}\tan\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)a_k=\sum_{k=1}^{4}\sqrt{3}\,a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)a_{2k}=24\sqrt{3}-\frac{36\sqrt{3}}{3}=12\sqrt{3}$$

13. 정답 : ③

(출제자 : 전승현)

[출제의도] 삼각함수가 포함된 함수의 최솟값과 최댓값을 구할 수 있는가?

[문항해설]

$f(x)=\sin^2 x-2k\sin x+k+3$에서 $f(x)=(\sin x-k)^2-k^2+k+3$이다.
$-1\le\sin x\le 1$이므로 k의 값에 따라 함수 $f(x)$의 최댓값을 다르게 구해야한다.

1) $k<0$
$f(x)$는 $\sin x=1$일 때 최댓값을 가지므로 이를 대입하면 $1-2k+k+3=-k+4=6$. 즉, $k=-2$이다.
$f(x)=\sin^2 x+4\sin x+1=(\sin x+2)^2-3$이므로 함수 $f(x)$는 $\sin x=-1$일 때 최솟값을 가진다.
따라서 $m=1-4+1=-2$

2) $k>0$
$f(x)$는 $\sin x=-1$일 때 최댓값을 가지므로 이를 대입하면 $1+2k+k+3=3k+4=6$. 즉, $k=\frac{2}{3}$이다.
$f(x)=\sin^2 x-\frac{4}{3}\sin x+\frac{11}{3}=(\sin x-\frac{2}{3})^2+\frac{29}{9}$이므로 함수 $f(x)$는 $\sin x=\frac{2}{3}$일 때 최솟값을 가진다.
따라서 $m=\frac{29}{9}$

1), 2)에서 $m=-2$ 또는 $m=\frac{29}{9}$이므로 가능한 모든 m의 합은 $\frac{11}{9}$이다.

14. 정답 : ②

(출제자 : 김범호)

[출제의도] 로그함수의 그래프를 활용하여 로그방정식 문제를 해결할 수 있는가?

[문항해설]

조건 (가)에서 삼각형 PQR의 한 변의 길이를 k라 두면, 조건 (나)를 통해 $4\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times k^2$를 얻는다. 이를 풀면 $k=4$ $(k>0)$임을 알 수 있다. 점 P에서 직선 $x=m$에 내린 수선의 발을 H라 하면, 정삼각형은 이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{QH}}=\overline{\mathrm{RH}}=2$가 된다. 또한, 정삼각형의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}\times 4=2\sqrt{3}$이다.
이제 점 Q의 x좌표가 m임을 이용하면 점 P의 좌표는 $m+2\sqrt{3}$이 된다.

$\overline{\mathrm{QH}}=2$이므로 점 Q의 y좌표보다 점 P의 y좌표가 2만큼 더 크다. 따라서 각각의 x좌표를 대입하면
$$2\log_3 m+2=2\log_3(m+2\sqrt{3})$$
을 얻는다. 이를 풀면 m값을 구할 수 있다.
$2(\log_3 m+1)=2\log_3(m+2\sqrt{3})$ 에서 양변을 2로 나누고 로그의 합의 성질을 이용하면
$\log_3 m+\log_3 3=\log_3(3m)=\log_3(m+2\sqrt{3})$ 에서 로그를 제거하면 $3m=m+2\sqrt{3}$이므로 $m=\sqrt{3}$이다.

따라서 $\mathrm{P}=(3\sqrt{3},\ 3)$, $\mathrm{Q}=(\sqrt{3},\ 1)$임을 알 수 있다. 마찬가지로 $\overline{\mathrm{QR}}=4$이므로 $\mathrm{R}=(\sqrt{3},\ 5)$이다.

주어진 그래프 $y=2\log_3(a-x)+b$는 두 점 P, R을 지나므로 각각을 대입하면

$$2\log_3(a-\sqrt{3})+b=5 \ \cdots\ (*)$$

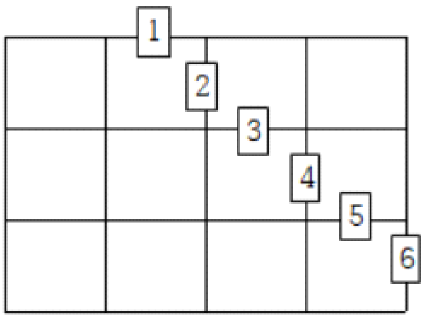
$$2\log_3(a-3\sqrt{3})+b=3 \ \cdots\ (**)$$

을 얻는다. 두 식을 연립하여 $(*)-(**)$을 계산하면 $2\log_3\left(\dfrac{a-\sqrt{3}}{a-3\sqrt{3}}\right)=2$을 얻고, 이를 정리하면 $\dfrac{a-\sqrt{3}}{a-3\sqrt{3}}=3$에서 $a=4\sqrt{3}$이다. 마지막으로 $(*)$에 대입하면 $2\log_3(4\sqrt{3}-\sqrt{3})+b=2\times\dfrac{3}{2}+b=3+b=5$이므로 $b=2$이다. 따라서 답은 $abm=4\sqrt{3}\times 2\times\sqrt{3}=24$이다.

15. 정답 : ① (출제자 : 서민수)

[출제의도] 조건부확률을 이해하고, 최단거리 문제를 해결할 수 있는가?

[문항해설]



각 작은 정사각형들의 한 변의 길이를 1이라고 할 때, 최단경로의 거리는 7이므로 민수와 태중이가 만날 때까지 민수가 이동한 거리는 $\dfrac{14}{3}$, 태중이가 이동한 거리는 $\dfrac{7}{3}$이다. 따라서 A와 B가 만나는 지점으로 가능한 곳을 그림에 표시해보면, 1, 2, 3, 4, 5, 6이 있다.

P에서 Q, P에서 Q로 가는 최단거리 모두 ${}_7\mathrm{C}_3=35$가지이다.

1에서 만나는 경우: $(\dfrac{4!}{3!\cdot 1!}\times\dfrac{2!}{2!})^2=16$

2에서 만나는 경우: $(\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}\times\dfrac{2!}{2!})^2=36$

3에서 만나는 경우: $(\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}\times\dfrac{2!}{1!\cdot 1!})^2=144$

4에서 만나는 경우: $(\dfrac{4!}{3!\cdot 1!}\times\dfrac{2!}{1!\cdot 1!})^2=64$

5에서 만나는 경우: $(\dfrac{4!}{3!\cdot 1!}\times\dfrac{2!}{2!})^2=16$

6에서 만나는 경우: $(\dfrac{4!}{4!}\times\dfrac{2!}{2!})^2=1$

그러므로 민수와 태중이가 만날 확률은 $\dfrac{16+36+144+64+16+1}{35^2}=\dfrac{277}{1225}$ 이다.

16. 정답 : ④ (출제자 : 김태중)

[출제의도] 역함수의 미분법을 활용하여 이계도함수를 계산할 수 있는가?

[문항해설]

$f'(x)>0$ 에서 $f(x)$의 역함수, $g(x)=f^{-1}(x)$가 $f(x)>0$을 만족시키는 x범위에서 존재한다.

그러므로 $f(f(g(x)))=f(x)$이므로 $\dfrac{\ln f(f(x))-\ln f'(x)}{f(x)}=1$ 에서 $x=g(x)$를 대입하면,

$\dfrac{\ln f(f(x))-\ln f'(x)}{f(x)}=\dfrac{\ln f(x)-\ln f'(g(x))}{x}=\dfrac{\ln\left(\dfrac{f(x)}{f'(g(x))}\right)}{x}=1$ 이고 역함수 미분법에 의하여,

$g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$ 이므로 대입한 후, 양변을 e의 지수로 취하면, $f(x)g'(x)=e^x$ 로 나타낼 수 있다.

따라서 $g''(x)=\left(\dfrac{e^x}{f(x)}\right)'=\dfrac{e^x(f(x)-f'(x))}{f(x)^2}$ 이다. 여기서, $f(1)-f'(1)=2$를 대입하면,

$\{f(1)\}^2\times g''(1)=2e$ 이다.

17. 정답 : ① (출제자 : 서민수)

[출제의도] 수열의 점화식을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[문항해설]

문제에서 제시한 가능한 경우를 나타내면 다음과 같다.

A			
B	0	0	
	0	0	

	0		
0	1	0	
	0	0	

	0		
0	1	0	
	0	1	0
		0	

첫 번째 경우는 외곽 12개의 격자를 선형으로 배열하여 연속한 두 격자에 1이 채워지지 않는 경우와 같다.
그러나 아래 격자 A, B에 1이 쓰인 경우는 문제의 조건을 만족시킬 수 없다.

A	0									0	B

만약 A, B에 1이 쓰여있다면 이 두 격자와 맞닿은 격자는 반드시 0일 수 밖에 없다.
따라서 a_{10}이 아니라 a_8을 제외해주어야 한다. 즉, (가)$=8$이다.

두 번째 경우는 1과 같은 방법으로 구할 수 있고 선형으로 배열을 하더라도 양끝이 만나는 경우가 아니므로 제외할 경우의 수는 없다. 그러나 녹색 영역에는 어떠한 수도 들어갈 수 있으므로 $2\times a_9$를 얻는다.

세 번째 경우도 2번째 경우와 마찬가지로 생각할 수 있는데, 한 가지 유의할 점은 1의 배치이다. 내부 격자에서도 1은 맞닿을 수 없으므로 서로 대각선에 위치한 경우만 가능하다. 즉, 6가지가 아니라 2가지이다.
따라서 (다)$=2$ 이다. 각 3개의 격자를 선형으로 배열을 하더라도 양끝이 만나는 경우가 아니므로 $(a_3)^2$이 되고 녹색 영역이 2개 있으므로 총 경우의 수는 $2^2\times(a_3)^2$이다. 격자 3개에 대하여 조건을 만족시키는 경우는 아래 5가지이므로 $a_3=5$이고, 따라서 (나)$=100$ 이다.

(i) 1이 포함 X : $\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}$

(ii) 1이 1개 포함 : $\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}$ $\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}$ $\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}$

(iii) 1이 2개 포함 : $\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}$

$\therefore p+q+r=8+100+2=110.$

18. 정답 : ④ (출제자 : 전승현)

[출제의도] 삼각함수와 일차함수의 교점의 개수를 구할 수 있는가?

[문항해설]

$n\sin\frac{\pi}{2}x-x\tan\frac{\pi}{2}x=0$을 정리하면

$\tan\frac{\pi}{2}x\left(n\cos\frac{\pi}{2}x-x\right)=0$ 이다. ($\sin\frac{\pi}{2}x$로 묶게 된다면, $\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{2}x}$을 계산해야하므로 불편하다.)

따라서 $\tan\frac{\pi}{2}x=0$ 또는 $n\cos\frac{\pi}{2}x-x=0$인 경우를 생각해야 한다.

(i) $\tan\frac{\pi}{2}x=0$

$\tan x=0$의 해는 모든 정수 n에 대하여 $x=n\pi$이므로

$x=0,\ \pm2,\ \pm4,\ \pm6,\ \cdots$일 때, 즉 $x=2p$(p는 정수)일 때, $\tan\frac{\pi}{2}x=0$이다.

따라서 $-n\le x\le n$에서 $\tan\frac{\pi}{2}x=0$을 만족하는 x의 개수는

1) $n=2k-1$ (k는 자연수)

$-2k+1\le 2p\le 2k-1$, 즉 $-k+\frac{1}{2}\le p\le k-\frac{1}{2}$이므로

이를 만족하는 정수 p는 $p=-k+1,\ -k+2,\ \cdots,\ k-2,\ k-1$ 이다.
따라서 p는 $k-1-(-k+1)+1=2k-1$ 개 이다.

2) $n=2k$ (k는 자연수)

$-2k \leq 2p \leq 2k$, 즉 $-k \leq p \leq k$이므로

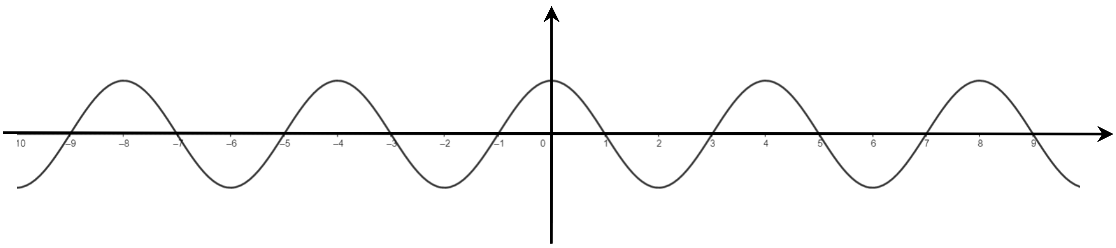
이를 만족하는 정수 p는 $p=-k, -k-1, \cdots, k-1, k$ 이다.

따라서 p는 $k-(-k)+1=2k+1$ 개 이다.

(ii) $n\cos\frac{\pi}{2}x-x=0$

$n \neq 0$이므로 $\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{n}x=0$, 즉 $\cos\frac{\pi}{2}x=\frac{1}{n}x$일 때 해를 갖는다.

즉 $y=\cos\frac{\pi}{2}x$와 $y=\frac{1}{n}x$의 교점의 개수와 같다. 이 때, $y=\frac{1}{n}x$ 는 $(-n, -1)$과 $(n, 1)$을 지나는 직선임을 알 수 있다. 이제 $y=\cos\frac{\pi}{2}x$의 그래프를 그려 교점의 개수를 생각해보자.



위는 $y=\cos\frac{\pi}{2}x$ 그래프이다. $y=\frac{1}{n}x$ 는 $(-n, -1)$과 $(n, 1)$을 지나는 직선이므로, $\cos\frac{\pi}{2}x=\frac{1}{n}x$의 해의 개수를 쉽게 구할 수 있다.

n	교점의 개수 (실근의 개수)
1	$1+0=1$ (양수일 때 1개, 음수일 때 0개)
2	$1+2=3$ (양수일 때 1개, 음수일 때 2개)
3	$1+2=3$ (양수일 때 1개, 음수일 때 2개)
4	$3+2=5$ (양수일 때 3개, 음수일 때 2개)
5	$3+2=5$ (양수일 때 3개, 음수일 때 2개)
6	$3+4=7$ (양수일 때 3개, 음수일 때 4개)
$\cdots$	$\cdots$

따라서 다음이 성립한다.

1) $n=2k-1$ (k는 자연수)

방정식 $n\cos\frac{\pi}{2}x-x=0$의 실근의 개수는 $2k-1$개 이다. 이때 실근 중 정수인 것은 존재하지 않는다. 즉, $\tan\frac{\pi}{2}x=0$의 해와 중복되는 경우는 존재하지 않는다.

2) $n=2k$ (k는 자연수)

방정식 $n\cos\frac{\pi}{2}x-x=0$의 실근의 개수는 $2k+1$개 이다. 이때, $x=2k$ 또는 $x=-2k$이면 $\tan\frac{\pi}{2}x=0$의 해와 중복된다. $x=2k$가 $\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{n}x=0$의 해일 때, $x=-2k$는 $\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{n}x=0$의 해가 아니고, 마찬가지로 $x=-2k$가 $\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{n}x=0$의 해일 때, $x=2k$는 해가 아닌 것을 그래프를 통해 확인할 수 있으므로, $\tan\frac{\pi}{2}x=0$의 해와 중복되는 것은 1개이다.

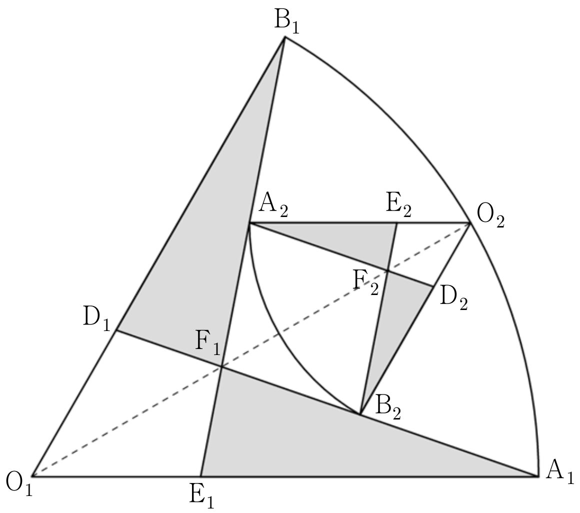
1과 2에 의하여
$n=2k-1$일 때 $a_n=2k-1+2k-1=4k-2$이고
$n=2k$일 때 $a_n=2k+1+2k+1-1=4k+1$이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{20}a_n=\sum_{k=1}^{10}(a_{2k-1}+a_{2k})=\sum_{k=1}^{10}(8k-1)=430.$$

19. 정답 : ② (출제자 : 김범호)

[출제의도] 코사인 법칙을 활용하여 무한등비급수의 합을 구할 수 있는가?

[문항해설]



삼각형 $O_1A_1D_1$과 삼각형 $O_1B_1E_1$은 두 변의 길이가 같고, 끼인각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$로 같으므로 SAS 합동이다. 따라서 공통부분인 사각형 $O_1E_1F_1D_1$을 제외한 두 삼각형 $A_1E_1F_1$과 $B_1D_1F_1$도 합동이다. 즉, 우리는 삼각형 하나의 넓이만 구해도 충분하다. 삼각형 $A_1E_1F_1$의 넓이를 직접 구하기 어려우므로 ($O_1A_1F_1$의 넓이)$-$($O_1E_1F_1$의 넓이)로 구할 수 있다.
그림 R_2에서 선분 O_1O_2를 이으면 부채꼴 $O_1A_1B_1$을 이등분한다. 따라서 선분 O_1F_1은 중심각의 각의 이등분선의 일부이다. 각의 이등분선의 성질에 의해 $\overline{O_1A_1}:\overline{O_1D_1}=\overline{A_1F_1}:\overline{D_1F_1}=3:1$ $\cdots$ (*) 이다.

삼각형 $O_1A_1D_1$에서 코사인법칙을 적용하면

$$\overline{O_1A_1}^2+\overline{O_1D_1}^2-2\times\overline{O_1A_1}\times\overline{O_1D_1}\times\cos(\angle A_1O_1D_1)=\overline{A_1D_1}^2$$

에서 $3^2+1^2-2\times3\times1\times\frac{1}{2}=7=\overline{A_1D_1}^2$ 이므로 $\overline{A_1D_1}=\sqrt{7}$이고,

(*)에 의해 $\overline{D_1F_1}=\frac{\sqrt{7}}{4}$임을 알 수 있다.

$\overline{O_1F_1}=a$라 하고, 삼각형 $O_1D_1F_1$에서 코사인법칙을 적용하면

$$\overline{O_1D_1}^2+\overline{O_1F_1}^2-2\times\overline{O_1D_1}\times\overline{O_1F_1}\times\cos(\angle D_1O_1F_1)=\overline{E_1F_1}^2$$

에서 $1^2+a^2-2\times1\times a\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2$이므로 $a^2-\sqrt{3}a+\frac{9}{16}=0$을 얻는다. 이를 풀면

$a=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\pm\sqrt{(\sqrt{3})^2-4\times\frac{9}{16}}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 에서 $a=\frac{\sqrt{3}}{4}$ 또는 $a=\frac{3\sqrt{3}}{4}$이다.

삼각형 $O_1D_1F_1$에서 a가 가장 긴 변의 길이이므로 $a>1$이고, 따라서 $a=\frac{3\sqrt{3}}{4}$이다. 삼각형의 넓이 공식을 이용하여 삼각형 $A_1E_1F_1$의 넓이를 구하면 다음과 같다.

$$(A_1E_1F_1\text{의 넓이})=(O_1A_1F_1\text{의 넓이})-(O_1E_1F_1\text{의 넓이})=\frac{1}{2}\times3\times a\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times1\times a\times\frac{1}{2}=\frac{a}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

따라서 $S_1=2\times\frac{3\sqrt{3}}{8}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$을 얻는다.

선분 O_1A_1과 선분 O_2A_2가 평행하므로 평행선의 성질에 의해 엇각으로 $\angle A_1O_1F_1=\angle A_2O_2F_1$이다.

맞꼭지각의 성질에 의해 $\angle O_1F_1E_1=\angle O_2F_1A_2$이므로 삼각형 $O_1E_1F_1$과 삼각형 $O_2A_2F_1$은 AA닮음이다.

$\overline{O_1O_2}=3$이므로 $\overline{O_2F_1}=3-a$이다.

따라서 $\overline{O_1E_1}:\overline{O_2A_2}=\overline{O_1F_1}:\overline{O_2F_1}=a:3-a$ 에서 $\overline{O_2A_2}=\frac{3-a}{a}=\frac{3-\frac{3\sqrt{3}}{4}}{\frac{3\sqrt{3}}{4}}=\frac{4}{\sqrt{3}}-1.$

따라서 공비는 $r=\left(\frac{\overline{O_2A_2}}{\overline{O_1A_1}}\right)^2=\frac{1}{9}\left(\frac{4}{\sqrt{3}}-1\right)^2=\frac{19-8\sqrt{3}}{27}$가 된다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{S_1}{1-r}=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{19-8\sqrt{3}}{27}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(\frac{27}{8(\sqrt{3}+1)}\right)=\frac{81\sqrt{3}}{32}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{3-1}\right)=\frac{81}{64}(3-\sqrt{3}).$$

20. 정답 : ③ (출제자 : 전승현)

[출제의도] 평균값 정리와 극대 극소 판정법을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[문항해설]

*극대 극소 판정법
1. $f'(a)$의 값과 $f''(a)$의 부호를 알아본다. (보기 ㄴ)
2. $f'(a)$의 값과 $x=a$주변에서 $f'(x)$의 부호를 알아본다. (보기 ㄷ)

(나) 조건에 의하여 $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\pi$일 때 $g(x)$의 값을 알 수 있다,

$g(0)=f(0)=0$, $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^4$, $g(\pi)=-f(\pi)=0$

따라서 평균값 정리에 의하여

(1) 구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 $g'(c)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^3$을 만족하는 c가 적어도 1개 존재한다.

(2) 구간 $\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$에서 $g'(c)=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^3$을 만족하는 c가 적어도 1개 존재한다.

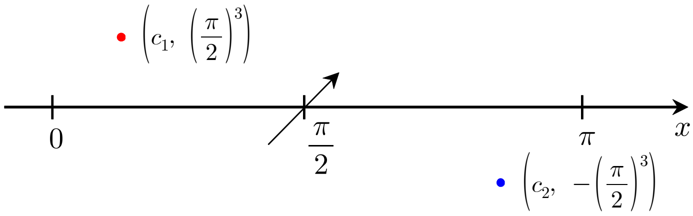
따라서 'ㄱ'은 참이다.

한편 $g'(x)=-f(x)\sin x+f'(x)\cos x+2x(x-\pi)(2x-\pi)$에서
$g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-f\left(\frac{\pi}{2}\right)+0+0=0$ 이다,
이 때 $g''\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$이면 함수 $g(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 극소이다.(물론 $g''\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$이어도 극솟값을 가질 수는 있음)

$g''(x)=-2f'(x)\sin x+(f''(x)-f(x))\cos x+12x^2-12\pi x+2\pi^2$ 에서
$g''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2f'\left(\frac{\pi}{2}\right)+12\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-12\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\pi^2=-2f'\left(\frac{\pi}{2}\right)-\pi^2$ 이다,
(나)에서 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)<-\frac{\pi^2}{2}$이므로 $g''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2f'\left(\frac{\pi}{2}\right)-\pi^2>0$이다,
따라서 $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$이고 $g''\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 극소이다. (3)
'ㄴ'은 거짓이다.

이제 (1), (2), (3)을 이용하여 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소인 지점을 찾아보자.
$g(x)$가 극대일 때, $g'(x)$의 부호는 (+)에서 (-)로 바뀌고
$g(x)$가 극소일 때, $g'(x)$의 부호는 (-)에서 (+)로 바뀐다.

$g'(x)$의 개형을 살펴보자.



(1)에 의하여 $g'(x)$는 점 $\left(c_1,\ \left(\frac{\pi}{2}\right)^3\right)(0 < c_1 < \frac{\pi}{2})$을 지난다.

(2)에 의하여 $g'(x)$는 점 $\left(c_2,\ -\left(\frac{\pi}{2}\right)^3\right)(\frac{\pi}{2} < c_2 < \pi)$을 지난다.

(3)에 의하여 $g'(x)$는 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$을 지나며 이 때 $g'(x)$의 부호는 (-)에서 (+)로 변한다.

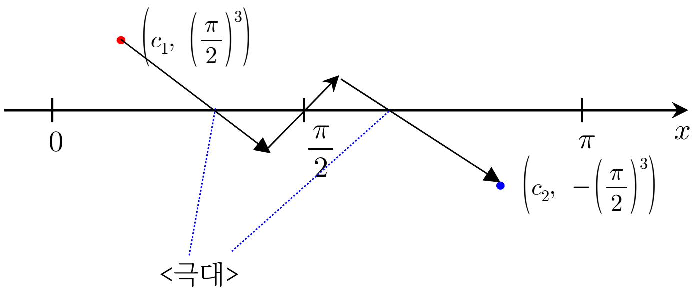
따라서

$0 < x < \frac{\pi}{2}$에서 함수 $g'(x)$는 연속이고, $g'(x) > 0$을 만족하는 점을 가지면서 $g'(\frac{\pi}{2}-) < 0$이므로 $g(x)$는 적어도 1개 이상의 극댓값을 가짐을 알 수 있다.

마찬가지로

$\frac{\pi}{2} < x < \pi$에서 함수 $g'(x)$는 연속이고, $g'(x) < 0$을 만족하는 점을 가지면서 $g'(\frac{\pi}{2}+) > 0$이므로 $g(x)$는 적어도 1개 이상의 극댓값을 가짐을 알 수 있다.

[참고]



따라서 ‘ㄷ’은 참이다.
따라서 옳은 것을 모두 고르면 ‘ㄱ, ㄷ’ 이다.

21. 정답 : ②

(출제자 : 김범호)

[출제의도] 수열의 점화식을 활용하여 규칙을 찾아 문제를 해결할 수 있는가?

[문항해설]

(나)에서 $\{p \mid a_p = p\} = \{p_1,\ p_2\}\ (p_1 < p_2)$ 이므로

$a_{p_1} = p_1$이고 $a_{p_2} = p_2$이며, p_1, p_2이외에 $a_p = p$를 만족하는 자연수 p는 존재하지 않는다.

$a_{p_1} = p_1$이므로

$a_{n+1} = \begin{cases} -\dfrac{a_n}{2} & (a_n = 2k) \\ 2a_n - 24 & (a_n = 2k+1) \end{cases}$ 임을 이용하면 p_1+1번째 항, p_1+2번째 항, $\cdots$ 을 구할 수 있다.

(i) $p_1 = 2k+1$ (k는 0또는 자연수)

$a_{p_1+1} = 2(2k+1) - 24 = 4k - 22 = 2(2k-11)$

$a_{p_1+2} = -\dfrac{4k-22}{2} = -2k+11$

$a_{p_1+3} = 2(-2k+11) - 24 = -4k-2 = 2(-2k-1)$

$a_{p_1+4} = -\dfrac{-4k-2}{2} = 2k+1 = a_{p_1}$

따라서 $a_{p_1} = a_{p_1+4} = a_{p_1+8} = \cdots = a_{p_1+4n} = a_{2k+4n+1} = 2k+1$ (n은 0또는 자연수) 이다.

마찬가지로

$a_{p_1+1} = a_{p_1+5} = a_{p_1+9} = \cdots = a_{p_1+4n+1} = a_{2k+4n+2} = 4k-22$ (n은 0또는 자연수)

$a_{p_1+2} = a_{p_1+6} = a_{p_1+10} = \cdots = a_{p_1+4n+2} = a_{2k+4n+3} = -2k+11$ (n은 0또는 자연수)

$a_{p_1+3} = a_{p_1+7} = a_{p_1+11} = \cdots = a_{p_1+4n+3} = a_{2k+4n+4} = -4k-2$ (n은 0또는 자연수) 이다.

이제 가능한 p_2를 찾아보자.

i -1) $p_2 = 2k+4n+1$

0 또는 자연수인 n에 대하여

$a_{p_2} = p_2 = 2k+4n+1$이고 $a_{p_2} = a_{p_1} = 2k+1$이다.

$2k+4n+1 = 2k+1$이다. 즉 $n=0$만 가능하므로 $p_1 = p_2$이다.

이때, $p_1 < p_2$이어야 하므로 만족하는 p_2는 존재하지 않는다.

i -2) $p_2 = 2k+4n+2$

0 또는 자연수인 n에 대하여

$a_{p_2} = p_2 = 2k+4n+2$이고 $a_{p_2} = a_{p_1+1} = 4k-22$이므로

$2k+4n+2 = 4k-22$이다. 즉 $p_1 = 2k+1 = 4n+25$일 때, $a_{p_2} = p_2$를 만족하는 p_2가 존재한다.

따라서 가능한 p_1은 25, 29, 33, $\cdots$이다.

ⅰ-3) $p_2 = 2k+4n+3$

0 또는 자연수인 n에 대하여

$a_{p_2} = p_2 = 2k+4n+3$이고 $a_{p_2} = a_{p_1+2} = -2k+11$이므로

$2k+4n+3 = -2k+11$이다. 즉 $p_1 = 2k+1 = -2n+5$일 때, $a_{p_2} = p_2$를 만족하는 p_2가 존재한다.

따라서 가능한 p_1은 1, 3, 5이다. $(\because p_1 > 0)$

ⅰ-4) $p_2 = 2k+4n+4$

0 또는 자연수인 n에 대하여

$a_{p_2} = p_2 = 2k+4n+4$이고 $a_{p_2} = a_{p_1+2} = -4k-2$이다.

이때, $-4k-2 < 2k+1$이므로 항상 $a_{p_2} < a_{p_1}$이다. 따라서 가능한 p_1과 p_2는 존재하지 않는다.

(ⅱ) $p_1 = 2k$ (k는 자연수)

$a_{p_1} = 2k$, $a_{p_1+1} = -\dfrac{2k}{2} = -k$

이때, $k = 2k'+1$인지, $k = 2k'$인지에 따라 a_{p_1+2}의 값이 달라진다. 따라서 $k = 2^r(2k'+1)$ (r과 k'은 0 또는 자연수이다) 라 하자.

$$a_{p_1+1} = -\frac{2k}{2} = -k = -2^r(2k'+1)$$

$$a_{p_1+2} = -\frac{-2^r(2k'+1)}{2} = 2^{r-1}(2k'+1)$$

$$a_{p_1+3} = -\frac{2^{r-1}(2k'+1)}{2} = -2^{r-2}(2k'+1)$$

$$\cdots$$

$$a_{p_1+r+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^r(2^r(2k'+1)) = -(-1)^r(2k'+1)$$

이때 a_{p_1+r+1}은 $2k+1$꼴이므로 '1.'과 같은 방법으로 생각한다면

$a_{p_1+r+1} = a_{p_1+4n+r+1} = a_{2k+4n+r+1} = -(-1)^r(2k'+1)$ (n은 0 또는 자연수)

$a_{p_1+r+2} = a_{p_1+4n+r+2} = a_{2k+4n+r+2} = -2(-1)^r(2k'+1)-24$ (n은 0 또는 자연수)

$a_{p_1+r+3} = a_{p_1+4n+r+3} = a_{2k+4n+r+3} = (-1)^r(2k'+1)+12$ (n은 0 또는 자연수)

$a_{p_1+r+4} = a_{p_1+4n+r+4} = a_{2k+4n+r+4} = 2(-1)^r(2k'+1)$ (n은 0 또는 자연수)

임을 알 수 있다.

이제 가능한 p_2를 찾아보자.

ⅱ-1) $p_2 = 2k+4n+r+1$

$a_{p_2} = a_{p_1+r+1} = -(-1)^r(2k'+1)$이다.

$a_{p_1} = 2k = 2(2^r(2k'+1)) = 2^{r+1}(2k'+1)$이므로 r의 값에 상관없이 항상 a_{p_2}보다 크므로, 가능한 p_1은 존재하지 않는다.

ⅱ-2) $p_2 = 2k+4n+r+2$

0 또는 자연수인 n에 대하여

$a_{p_2} = p_2 = 2k+4n+r+2$이고 $a_{p_2} = a_{p_1+r+2} = -2(-1)^r(2k'+1)-24$이다.

$a_{p_1} = 2k = 2(2^r(2k'+1)) = 2^{r+1}(2k'+1)$이므로 r의 값에 상관없이 항상 a_{p_2}보다 크므로, 가능한 p_1은 존재하지 않는다.

ⅱ-3) $p_2 = 2k+4n+r+3$

0 또는 자연수인 n에 대하여

$a_{p_2} = p_2 = 2k+4n+r+3$이고 $a_{p_2} = a_{p_1+r+3} = (-1)^r(2k'+1)+12$이므로

$2k+4n+r+3 = 2(2^r(2k'+1))+4n+r+3 = (-1)^r(2k'+1)+12$이다.

$k'(2^{r+2}-2(-1)^r) = 12-(2^{r+1}+4n+r+3-(-1)^r)$에서

$2^{r+2}-2(-1)^r > 0$이고 k'은 0또는 자연수이므로 좌변은 양수이다. 따라서 우변도 양수이어야하므로, 가능한 r은 $0,\ 1,\ 2$이다.

$r=0$일 때

$2k+4n+3 = 4k'+4n+5 = 2k'+1+12$이므로

$2k'+1 = k = -4n+9$이다. 따라서 $p_1 = 2k = -8n+18$이므로

가능한 p_1은 $2,\ 10,\ 18$이고($\because p_1>0$), p_2는 각각 $13,\ 17,\ 21$이다. 이때 p_2가 홀수이므로, ‘ⅰ’에 의하여 $a_p = p$를 만족하는 p는 각각의 경우에 $p_1,\ p_2$ 두 가지로 유일하다.

$r=1$일 때

$2k+4n+1+3 \equiv 2(4k'+2)+4n+4 = 8k'+4n+8 = -2k'-1+12$이므로

$2(2k'+1) = k = \dfrac{-8n+16}{5}$이다. 따라서 $p_1 = 2k = \dfrac{-16n+32}{5}$이다.

p_1은 자연수이므로, 가능한 p_1은 존재하지 않는다.

$r=2$일 때

$2k+4n+2+3 \equiv 2(8k'+4)+4n+5 = 16k'+4n+13 = 2k'+1+12$이므로

$2^2(2k'+1) = k = \dfrac{-16n+28}{7}$이다. 따라서 $p_1 = 2k = \dfrac{-32n+56}{7}$이다.

p_1은 자연수이므로, p_1은 8뿐이다. 이때 p_2는 13이므로, ‘ⅰ’에 의하여

따라서 가능한 p_1은 $2,\ 8,\ 10,\ 18$이고, p_2는 13이다. 이 경우, p_2가 홀수이므로 ‘ⅰ’에 의하여 $a_p = p$를 만족하는 p는 $p_1,\ p_2$ 두 가지로 유일하다.

ⅱ-4) $p_2 = 2k+4n+r+4$

$a_{p_2} = a_{p_1+r+4} = 2(-1)^r(2k'+1)$이다.

$a_{p_1} = 2k = 2(2^r(2k'+1)) = 2^{r+1}(2k'+1)$이므로 r의 값에 상관없이 항상 a_{p_2}보다 크므로, 가능한 p_1은 존재하지 않는다.

따라서 p_1은 1, 2, 3, 5, 8, 10, 18, 25, 29, 33, 37, $\cdots$이다.

$\therefore \sum_{n=1}^{11} \alpha_n = 171$.

22. 정답 : 5 (출제자 : 전승현)

[출제의도] 조건부 확률의 정의를 알고있는가?

[문항해설]

조건부 확률의 정의를 이용하면 $\frac{1}{\mathrm{P}(A|B)} = \frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(A \cap B)} = 5$.

23. 정답 : 2 (출제자 : 전승현)

[출제의도] 로그의 성질을 활용하여 계산할 수 있는가?

[문항해설]

로그의 성질을 활용하여 계산하자.

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{15} \log_2(\log_n(n+1)) &= \log_2(\log_2 3) + \log_2(\log_3 4) + \cdots \log_2(\log_{15} 16) \\ &= \log_2(\log_2 3 \times \log_3 4 \times \cdots \times \log_{15} 16) \\ &= \log_2\left(\frac{\log 3}{\log 2} \times \frac{\log 4}{\log 3} \times \cdots \times \frac{\log 16}{\log 15}\right) \\ &= \log_2\left(\frac{\log 16}{\log 2}\right) \\ &= \log_2(4) \\ &= 2\end{aligned}$$

24. 정답 : 344 (출제자 : 서민수)

[출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 알고, $\sum k$의 값을 구할 수 있는가?

[문항해설]

$a_n = S_n - S_{n-1} = 3n - 4\ (n \geq 2)$를 만족한다.

$a_1 = S_1 = -2$이므로, $n = 1$일 때 $a_n = 3n - 4$를 만족하지 않는다.

따라서 답은

$$\sum_{k=1}^{5} ka_{3k-2} = 1\times(-2)+\sum_{k=2}^{5} k(9k-10) = -2+9\times\frac{5\times6\times11}{6}-10\times\frac{5\times6}{2}-(-1)=344$$

이다.

25. 정답 : 176

(출제자 : 서민수)

[출제의도] 공통접선의 개념을 이해하고 있는가?

[문항해설]

두 곡선이 접하는 점을 A라 하고, x좌표를 α라고 하자.

점 A의 y좌표를 통해 $ke^{\alpha}=\alpha^3+3\alpha^2-\alpha-7$

접선의 기울기를 통해 $ke^{\alpha}=3\alpha^2+6\alpha-1$를 알 수 있다.

두 식을 양변에 대해 빼면, $\alpha^3-7\alpha-6=(\alpha-3)(\alpha+1)(\alpha+2)=0$

가능한 α 값은 -2, -1, 3이다.

(ⅰ) $\alpha=-2 \Rightarrow k=-e^2$

(ⅱ) $\alpha=-1 \Rightarrow k=-4e$

(ⅲ) $\alpha=3 \Rightarrow k=44e^{-3}$

따라서 가능한 모든 실수 k 값의 곱은 $-e^2\times(-4e)\times44e^{-3}=176$이다.

26. 정답 : 144

(출제자 : 전승현)

[출제의도] 등비수열의 합을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[문항해설]

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 할 때 $a_2=ar=6$이므로 $a\neq0$이고 $r\neq0$이다.

$\sum_{n=1}^{6}|a_n|$의 값은 a와 r의 부호에 따라 달라지므로 케이스를 나눠보자. 이때 $a_2=ar=6>0$이므로

a, $r>0$또는 a, $r<0$이다. 또 등비수열의 합 공식을 이용할 때 공비가 1인 경우는 제외해야하므로,

$\sum_{n=1}^{3}(a_n)^2=\sum_{n=1}^{3}a^2(r^2)^{n-1}$에서 r이 1또는 -1을 가지는 경우도 따로 생각해야한다.

(ⅰ) $a>0$, $r>0$, $r\neq\pm1$

$$\sum_{n=1}^{6}|a_n|=\sum_{n=1}^{6}ar^{n-1}=\frac{a(r^6-1)}{r-1}$$

$\sum_{n=1}^{6}|a_n|=\sum_{n=1}^{3}(a_n)^2$이므로 $\frac{a(r^6-1)}{r-1}=\frac{a^2(r^6-1)}{r^2-1}$이다.

양변을 정리하면 $a=r+1$임을 알 수 있다.

$a_2=ar=6=r(r+1)=r^2+r$

$r^2+r-6=(r+3)(r-2)=0$이므로 $r=2,\ -3$이다. 이때 $r>0$이므로 $r=2$이고 따라서

$a_3=ar^2=(r+1)r^2=12$ 이다.

(ii) $a<0,\ r<0,\ r\neq\pm1$

$$\sum_{n=1}^{6}|a_n|=\sum_{n=1}^{6}|a||r^{n-1}|=\sum_{n=1}^{6}(-a)(-r)^{n-1}=\frac{-a(r^6-1)}{-r-1}=\frac{a(r^6-1)}{r+1}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{6}|a_n|=\sum_{n=1}^{3}(a_n)^2$이므로 $\dfrac{a(r^6-1)}{r+1}=\dfrac{a^2(r^6-1)}{r^2-1}$이다.

양변을 정리하면 $a=r-1$임을 알 수 있다.

$a_2=ar=6=r(r-1)=r^2-r$

$r^2-r-6=(r-3)(r+2)=0$이므로 $r=-2,\ 3$이다. 이때 $r<0$이므로 $r=-2$이고 따라서

$a_3=ar^2=(r-1)r^2=-12$ 이다.

(iii) $r\neq\pm1$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{6}|a_n|=\sum_{n=1}^{3}(a_n)^2$에서

$r=\pm1$일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{6}|a_n|=36$이고 $\displaystyle\sum_{n=1}^{3}(a_n)^2=108$이므로 만족하지 않는다. 따라서 $r\neq\pm1$임을 알 수 있다.

따라서 답은 $|12\times(-12)|=144$이다.

27. 정답 : 282 (출제자 : 서민수)

[출제의도] 중복조합을 이용하여 함수의 개수를 구할 수 있는가?

[문항해설]

$g(i)=f(i)-f(i-1)$인 함수 g를 생각하자. 문제의 조건은 $0\le g(i)\le 2\ (2\le i\le 7)$ 과 동일하다.

$1\le f(7)=f(1)+\displaystyle\sum_{i=2}^{7}g(i)\le 5$를 만족하는 함수 f의 개수를 찾기 위해 경우를 분류한다.

(i) $\displaystyle\sum_{i=2}^{7}g(i)=0$

다음을 만족하는 함수 g의 개수는 ${}_6\mathrm{H}_0=1$개이다. 가능한 $f(1)$의 값은 1이상 5이하이므로 5개이다.

그러므로 이 조건을 만족하는 함수 f의 개수는 $1\times5=5$개이다.

(ii) $\displaystyle\sum_{i=2}^{7}g(i)=1$

다음을 만족하는 함수 g의 개수는 ${}_6\mathrm{H}_1={}_6\mathrm{C}_1=6$개이다. 가능한 $f(1)$의 값은 1이상 4이하이므로 4개이다.

그러므로 이 조건을 만족하는 함수 f의 개수는 $6\times4=24$개이다.

(iii) $\sum_{i=2}^{7} g(i)=2$

다음을 만족하는 함수 g의 개수는 ${}_6\mathrm{H}_2={}_7\mathrm{C}_2=21$개이다. 가능한 $f(1)$의 값은 1이상 3이하이므로 3개이다. 그러므로 이 조건을 만족하는 함수 f의 개수는 $21\times 3=63$개이다.

(iv) $\sum_{i=2}^{7} g(i)=3$

다음을 만족하는 함수 g의 개수는 ${}_6\mathrm{H}_3={}_8\mathrm{C}_3=56$개에서 $g(i)\geq 3$인 i가 존재하는 경우 $(3,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$ ${}_6\mathrm{P}_1=6$개를 제외한 $56-6=50$개이다. 가능한 $f(1)$의 값은 1, 2이므로 2개이다.
그러므로 이 조건을 만족하는 함수 f의 개수는 $50\times 2=100$개이다.

(v) $\sum_{i=2}^{7} g(i)=4$

다음을 만족하는 함수 g의 개수는 ${}_6\mathrm{H}_4={}_9\mathrm{C}_4=126$개에서 $g(i)\geq 3$인 i가 존재하는 경우 $(3,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$, ${}_6\mathrm{P}_2=30$개와 $(4,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$, ${}_6\mathrm{P}_1=6$개를 제외한 $126-30-6=90$개이다. 가능한 $f(1)$의 값은 1이므로 1개이다. 그러므로 이 조건을 만족하는 함수 f의 개수는 $90\times 1=90$개이다.

따라서 조건을 만족하는 함수 f의 개수는 $5+24+63+100+90=282$개다.

28. 정답 : 100 (출제자 : 한성재)

[출제의도] 사인법칙을 활용하여 삼각함수의 도형에의 극한을 구할 수 있는가?

[문항해설]

$\angle\mathrm{PQC}=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로 $\angle\mathrm{PQS}=\frac{\pi}{2}$이다. 또한 $\angle\mathrm{SBQ}=\frac{\pi}{4}-\theta$이므로 삼각형 외각의 성질에 의해 $\angle\mathrm{PSQ}=\frac{\pi}{4}$이다. 즉, 삼각형 PQS는 직각이등변삼각형이다. 점 S에서 선분 BQ에 내린 수선의 발을 H라 하면, $\triangle\mathrm{PQC}\equiv\triangle\mathrm{QSH}$ (RHS합동) 이므로 $\overline{\mathrm{QC}}=\overline{\mathrm{SH}}\cdots(*)$ 이다.

$\overline{\mathrm{BC}}=1$이므로 $\overline{\mathrm{PC}}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$이고 $\overline{\mathrm{QC}}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\tan\theta$이다. $(*)$에서 $\overline{\mathrm{SH}}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\tan\theta$이므로,

$\overline{\mathrm{BS}}=\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\tan\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}=\sec\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\tan\theta$. 한편 맞꼭지각에 의해서 $\angle\mathrm{PSQ}=\angle\mathrm{BSR}=\frac{\pi}{4}$이므로 사인법칙을 쓰면 $\dfrac{\overline{\mathrm{RS}}}{\sin(\angle\mathrm{RBS})}=\dfrac{\overline{\mathrm{BS}}}{\sin(\angle\mathrm{BRS})}$를 얻고, $\overline{\mathrm{RS}}=\dfrac{\sin\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}\overline{\mathrm{BS}}$이다.

따라서 $S(\theta)=\frac{1}{2}\times\dfrac{\sin\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}\times\left(\sec\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\tan\theta\right)^2\times\sin\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\sqrt{2}}{4}\times\frac{\sec^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}\times\frac{\tan^2\theta}{\theta^2}\times\frac{\sin\theta}{\theta}\right\}=\frac{\sqrt{2}}{4}\times\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times1^2\times1=1$$ 이다.

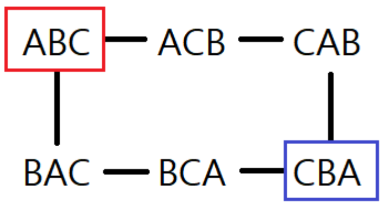
따라서 답은 $100\alpha=100\times1=100$ 이다.

29. 정답 : 143 (출제자 : 전승현)

[출제의도] 조건부확률을 활용하여 순열 문제를 해결할 수 있다.

[문항해설]
1번 자리와 2번 자리를 바꾸는 시행을 p
2번 자리와 3번 자리를 바꾸는 시행을 q 라 하자.

처음 배열 ABC에서 시행 p가 일어나면 BAC가 되고, q가 일어나면 ACB가 된다.
한편 BAC에서 시행 p가 일어나면 ABC로 되돌아오고, q가 일어나면 BCA가 된다.
마찬가지로 각각의 경우에 대하여 시행 p또는 q가 일어난 경우의 변화를 살펴본다면, 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.



그림의 인접한 카드 배열은 한 번의 시행을 거친 뒤 카드의 배열 변화를 나타낸 것이다.
(ex) BCA 는 한 번의 시행을 거치면 CBA 또는 BAC 로 바뀔 수 있다.

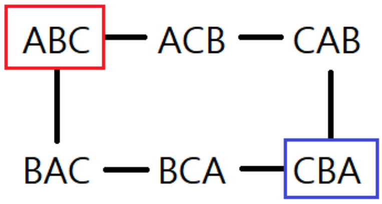
따라서, 위의 그림에서 한번의 시행을 거치면 인접한 카드 배열로 변화함을 알 수 있다.
9번의 시행 뒤 ABC가 CBA로 변하는 경우의 수는 다음과 같다.

1. 그림에서 시계방향으로 9번 이동
$\Rightarrow\ {}_9C_9=10$
2. 그림에서 시계방향으로 6번, 반시계방향으로 3번 이동
$\Rightarrow\ {}_9C_6=84$ (9번의 시행 중 시계방향으로 이동하는 6번을 선택하는 경우의 수)
3. 그림에서 시계방향으로 3번, 반시계방향으로 6번 이동
$\Rightarrow\ {}_9C_3=84$ (9번의 시행 중 시계방향으로 이동하는 3번을 선택하는 경우의 수)
4. 그림에서 반시계방향으로 9번 이동
$\Rightarrow\ {}_9C_0=1$

따라서 전체 경우의 수는 $1+84+84+1=170$ 가지이다.

이제 9번의 시행 뒤 카드가 1, 2, 3, 번 자리에 C, B, A 순서로 놓여 있을 때, 9번의 시행 도중에 카드배열이 처음과 같아지는 순간이 적어도 한 번 존재하는 확률을 여사건의 확률을 이용하여 구해보자.

9번의 시행 도중에 카드배열이 처음과 같아지는 순간이 한 번도 존재하지 않으며, 9번 시행 뒤에 카드 배열이 C, B, A인 경우의 수는



ABC에서 9번 시행 뒤 CBA가 되는 경우는

1. 그림에서 시계방향으로 9번 이동
2. 그림에서 시계방향으로 6번, 반시계방향으로 3번 이동
3. 그림에서 시계방향으로 3번, 반시계방향으로 6번 이동
4. 그림에서 반시계방향으로 9번 이동

가 가능하다. 이때, 1과 4의 경우, 카드배열이 ABC가 되는 경우가 반드시 한 번 존재하므로 불가능하다.
2와 3의 경우는 서로 대칭이므로, 둘 중 하나의 경우만 생각해보자.

2. 시계방향으로 6번, 반시계방향으로 3번 이동
시게방향으로 이동하는 것을 a, 반시계방향으로 이동하는 것을 b라 하자. 첫 번째 시행으로 b를 하게 된다면 반드시 한 번 이상 카드배열이 ABC가 되므로, 불가능하다. 따라서 시행 a가 첫 번 째 시행부터 몇 번 연속하는 지 에 따라 케이스를 나눠보자.

(i) $aaaaaabbb$ (처음에 여섯 번 시계방향 이동)
$aaaaaa$의 결과 ABC로 돌아오게 되므로 불가능하다.

(ii) $aaaaab+(a\ \ b\ \ b)$ (처음에 다섯 번 시계방향 이동)
$aaaaab$의 결과 카드 배열은 BCA이다. 그 뒤 b를 연속해서 두 번하더라도 카드배열은 ABC로 돌아가지 않는다. 따라서 가능한 경우의 수는 $(a\ \ b\ \ b)$를 배열하는 경우의 수와 같다.
$\Rightarrow \dfrac{3!}{2!}=3$

(iii) $aaaab+(a\ \ a\ \ b\ \ b)$ (처음에 네 번 시계방향 이동)
$aaaab$의 결과 카드 배열은 CBA이다. 그 뒤 b를 연속해서 두 번하더라도 카드배열은 ABC로 돌아가지 않는다. 따라서 가능한 경우의 수는 $(a\ \ a\ \ b\ \ b)$를 배열하는 경우의 수와 같다.
$\Rightarrow \dfrac{4!}{2!2!}=6$

(ⅳ) $aaab+(a\ a\ a\ b\ b)$ (처음에 세 번 시계방향 이동)
$aaab$의 결과 카드 배열은 CAB이다. 그 뒤 b를 연속해서 두 번한다면 카드배열은 ABC가 되므로, 가능한 경우의 수는 $(a\ a\ a\ b\ b)$를 배열하는 경우의 수에서 $bb+(a\ a\ a)$, 즉 1가지를 제외한 경우의 수와 같다.

$\Rightarrow \dfrac{5!}{2!3!}-1=9$

(ⅴ) $aab+(a\ a\ a\ a\ b\ b)$ (처음에 두 번 시계방향 이동)
aab의 결과 카드 배열은 ACB이다. 그 뒤 b를 한다면 카드배열은 ABC가 되므로 불가능하다.

또한 abb도 불가능하다. 따라서 $(a\ a\ a\ a\ b\ b)$를 배열하는 경우의 수에서 $b+(a\ a\ a\ a\ b)$를 배열하는 경우의 수와 $abb+(a\ a\ a)$를 배열하는 경우의수를 제외하면 된다.

$\Rightarrow \dfrac{6!}{4!2!}-\dfrac{5!}{4!}-1=9$

(ⅵ) $ab+(a\ a\ a\ a\ a\ b\ b)$ (처음에 한 번 시계방향 이동)
ab의 결과 카드 배열은 ABC이므로 불가능하다.

3. 시계방향으로 3번, 반시계방향으로 6번 이동 ⇒ 2와 일치한다.

따라서 9번의 시행 도중에 카드배열이 처음과 같아지는 순간이 한 번도 존재하지 않으며, 9번 시행 뒤에 카드 배열이 C, B, A인 경우의 수는 $2\times(3+6+9+9)=54$이다.

따라서 9번의 시행 뒤 카드가 1, 2, 3, 번 자리에 C, B, A 순서로 놓여 있을 때, 9번의 시행 도중에 카드배열이 처음과 같아지는 순간이 적어도 한 번 존재할 확률은 $1-\dfrac{54}{170}=\dfrac{58}{85}$이고, 답은 $58+85=143$ 이다.

30. 정답 : 233 (출제자 : 김범호)

[출제의도] 평균변화율을 활용하여 구간분할함수의 미분가능성 문제를 해결할 수 있다.

[문항해설]
함수 $g(x)$를 $f(x)$의 범위에 따라 다시 쓰면

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq 1) \\ \dfrac{1}{f(x)} & (f(x)<1) \end{cases}$$

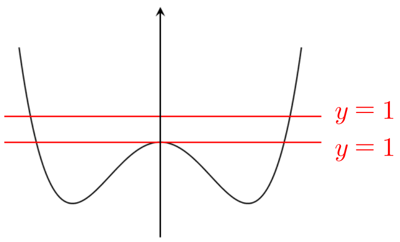
이다. $f(x)$는 항상 양수인 사차함수이므로 $g(x)$는 각 구간에서 미분가능한 함수이다. 몫의 미분법을 활용하면

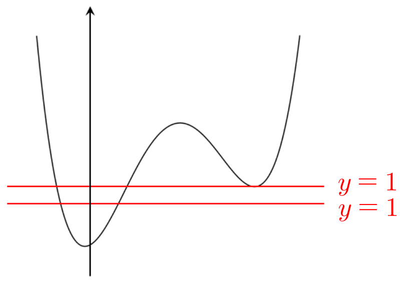
$$g'(x)=\begin{cases} f'(x) & (f(x)>1) \\ \dfrac{-f'(x)}{\{f(x)\}^2} & (f(x)<1) \end{cases}$$

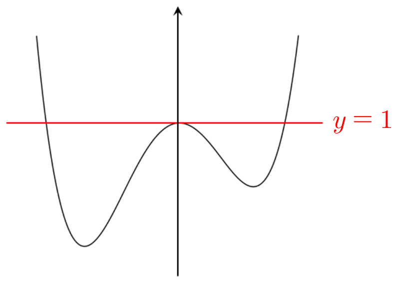
를 얻는다. 즉, $g(x)$는 $f(x)=1$이고 $f'(x)\neq 0$인 지점에서 미분가능하지 않다.

조건 (가)를 통해 $f(x)=1$이고 $f'(x)\neq 0$을 만족하는 점이 2개 존재한다는 사실을 알 수 있다.
여기에 조건 (나)를 보면 $g(x)$가 극대가 되는 x의 개수가 2개이므로 $f(x)\neq 1$인 x값 중에 극대 또는 극소가

되는 점이 2개만 있어야 한다. 함수 $g(x)$는 $f(x)>1$에서 $f(x)$와 같고, $f(x)<1$에서 $\dfrac{1}{f(x)}$과 같다. 즉, $f(x)>1$에서 극대이면 $g(x)$도 극대가 된다. 마찬가지로 $f(x)<1$에서 극소이면 $g(x)$에서 극대가 된다.
따라서 조건 (가), (나)를 모두 만족하는 경우는 아래 3가지이다 (단, 대칭인 경우는 같은 것으로 취급한다).





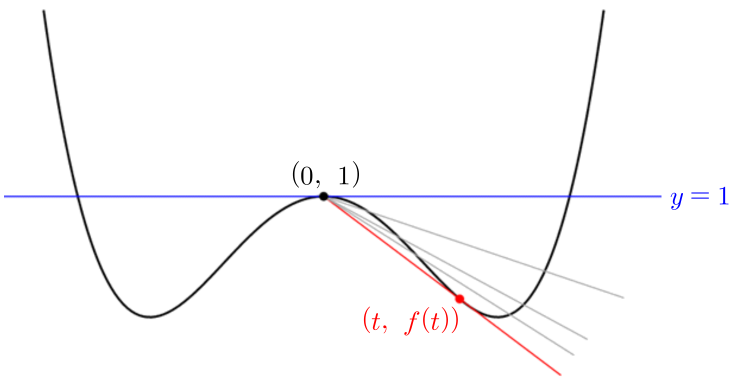


마지막으로 조건 (다)를 보자.

절댓값 안의 함수 $\dfrac{g(x)-1}{xg(x)}$를 다시 쓰면, $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{xg(x)}=\dfrac{1-\dfrac{1}{g(x)}}{x}$이 된다.

$g(x)$는 구간 $[-\alpha,\ \alpha]$에서 1보다 작으므로 $\dfrac{1}{f(x)}$과 같다. 따라서 주어진 조건은 두 점 $(0,\ 1)$과 $(x,\ f(x))$의 평균변화율의 절댓값을 의미한다.

첫 번째 경우에서 $f(0)<1$인 경우 $x=0$ 근처에서 평균변화율이 최솟값을 가진다. 그러나 구간 $[0,\ \alpha)$에서 극한이 $-\infty$로 발산하기 때문에 이 경우는 기울기의 절댓값의 최댓값이 존재하지 않는다. $f(0)=1$인 경우 아래와 같이 접할 때, 기울기의 절댓값이 최대가 된다.



두 번째 경우는 $f(0)<1$이므로 마찬가지로 구간 $[0,\ \alpha)$ 평균변화율의 극한이 $-\infty$로 발산하기 때문에 최댓값이 존재하지 않는다.

세 번째 경우는 $f(0)=1$이므로 조건 (다)를 만족한다.
따라서 조건 (다)를 만족시키는 경우는 첫 번째 그래프에서 $f(0)=1$인 경우와 세 번째 그래프에서 $f(0)=1$인 경우 2가지이다.

세 번째 그래프를 먼저 생각해보자.
함수의 극댓값을 β로 놓으면 조건 (다)를 만족시키는 경우는 $f(x)=(x-\beta)^2(x-\alpha)(x+\alpha)+1$임을 알 수 있다.

$(0,\ 1)$을 지나는 직선이 $y=f(x)$와 접하게 되는 순간의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 하면 접선의 방정식은 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$와 같다. 이 접선은 $(0,\ 1)$을 지나므로 대입하면 $f(t)-tf'(t)=1$을 얻는다.

$f(x)$를 미분하면 $f'(x)=(x-\beta)(4x^2-2\beta x-2\alpha^2)$이므로 대입하면

$$1=-t(t-\beta)(4t^2-2\beta t-2\alpha^2)+(t-\beta)^2(t^2-\alpha^2)+1$$
$$(t-\beta)(-3t^3+\beta t^2+\alpha^2 t+\beta\alpha^2)=0$$

이 된다. $t\in(0,\ \alpha]$를 만족하려면 $t=\dfrac{\alpha}{\sqrt{3}}$이어야 한다. $t=\dfrac{\alpha}{\sqrt{3}}$를 위의 식에 대입하면

$\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{3}}-\beta\right)\left(-3\dfrac{\alpha^3}{3\sqrt{3}}+\beta\dfrac{\alpha^2}{3}+\dfrac{\alpha^3}{\sqrt{3}}+\beta\alpha^2\right)=0$이다. $\cdots$ (*)

또한 조건 (다)는 $f'\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{3}}\right)=-\dfrac{\alpha}{\sqrt{3}}$와 같다. 이를 대입하면

$\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{3}}-\beta\right)\left(\dfrac{4}{3}\alpha^2+2\beta\dfrac{\alpha}{\sqrt{3}}-2\alpha^2\right)=-\dfrac{\alpha}{\sqrt{3}}$이다. $\cdots$ (**)

식 (*), (**)를 통해 $\beta=0$임을 알 수 있다. 따라서 $f(x)=x^2(x-\alpha)(x+\alpha)+1$임을 알 수 있다.
(결론적으로 첫 번째와 세 번째 경우가 같다는 것을 확인할 수 있다.)

마찬가지로 식 (**)에 $\beta=0$을 대입하면 $\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$이고, α는 양수이므로 $\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$임을 얻는다.

따라서 $f(x)=x^2\left(x^2-\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2\right)+1=x^2\left(x^2-\dfrac{3}{2}\right)+1=x^4-\dfrac{3}{2}x^2+1$이므로 $f(4)=4^4-\dfrac{3}{2}\times 4^2+1=233$이 답이다.