# 2022학년도 예비평가 미적분 30번 해설

**by 청의미**

오늘은 이 문제를 한번 분질러볼 계획입니다.

**30.** 두 양수 $a$, $b\,(b<1)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+ax & (x\le 0) \\ \dfrac{\ln(x+b)}{x} & (x>0) \end{cases}$$

이라 하자. 양수 $m$에 대하여 직선 $y=mx$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(m)$이라 할 때, 함수 $g(m)$은 다음 조건을 만족시킨다.

> $\displaystyle\lim_{m\to\alpha-} g(m)-\lim_{m\to\alpha+} g(m)=1$을 만족시키는 양수 $\alpha$가 오직 하나 존재하고, 이 $\alpha$에 대하여 점 $(b,\,f(b))$는 직선 $y=\alpha x$와 곡선 $y=f(x)$의 교점이다.

$ab^2=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이고, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=0$이다.) [4점]

이 문제를 들어가기 전에, 5월 예비평가 풀어보지 않으신 분들께 말씀드립니다.

**풀어요 제발.**

이게 당연한 거지만 말씀드립니다. 평가원에서 출제하는 문항을 공부하는 것을 기출공부라고 합니다.

기출의 중요성은 굳이 더 말 안 해도 정말 중요합니다.

평가의 기준을 제시하고, 공부의 방향을 제시하는 것이 기출입니다.

여러분이 으레 말하는 트렌드라 하는 것은, 결국 최근 기출의 경향을 의미합니다.

그 기출의 경향만을 따라가는 것이 좋은 공부법은 아니나, 완전히 무시할 수는 없습니다.

그리고 그 경향의 예시가 현재 평가원 사이트에 올라와있는 것입니다.

풀어요. 그리고 모자란 부분을 다시 한 번 채우시길 바랍니다.

그리고 아직 못 푸신 분들은, 풀어보시고 다시 한 번 보시길 바랍니다.

--------------------------------------------------------------------------

먼저 이 문항의 접근방법은 두 가지가 있습니다.

양수 $m$에 대하여 직선 $y=mx$와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(m)$이라 했으므로,

$\dfrac{f(x)}{x}=m$와 같이 변형하여 $y=mx$을 구할 수 있습니다.

이 때, $x$가 0이 아님을 가정했기 때문에, $x$가 0일 때, (0,0)를 지나는 것을 반드시 기억하여 세어주어야 합니다.

혹은, $mx=f(x)$그대로 두어, $m$을 움직여가며 구할 수도 있습니다.

**풀이 1)**

$y=-x+a$의 그래프는 그릴 수 있으나,

우리가 그리기 힘들고 너무나도 어려운 그래프는 다음의 그래프입니다..

$y=\dfrac{\ln(x+b)}{x^2}$

이제 이 그래프를 어떻게 그릴까요?

**그래프를 그리는 방법은, 원함수의 정보를 이끌어 낸 후, 도함수를 구하여 극값을 찾는 식입니다.**

**일단 정의역은 $x$>0 범위이며, 0에 한없이 가까워질수록 분자는 음수의 값, 분모는 0에 한없이 가까워집니다.**

**즉, $x$->0- 극한은 음의 무한대로 갈 것이며, x가 한없이 커질 경우, $\ln(x+b)$는 양수이고, f($f(x)$)는 0에 가까워지므로**

**위 식 또한 0으로 가까워질 것임을 이해할 수 있습니다.**

이제, 미분해봅시다.

(여러분은 다 외우셨겠지만, 혹시라도 헷갈리신다면, 몫의 미분법은 곱의 미분법을 활용하면 쉽게 증명 가능합니다.

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{\dfrac{x^2}{x+b} - 2x\ln(x+b)}{x^4} \\
&= \frac{\dfrac{x}{x+b} - 2\ln(x+b)}{x^3}
\end{aligned}
$$

이제, 위 식이 0을 지나면서 부호가 바뀌는 지점을 찾아야 극값을 확인할 수 있는데..

저걸 확인하기 너무나도 힘듭니다.. 일단 방정식으로 안 풀립니다.

**아마 여러분이 수없이 교과서를 공부하시고 기출분석을 하셨다면 아실 것입니다.**

**교육과정 상에서 방정식을 풀어 근을 정확하게 구하는 행위는 결국 일차방정식의 곱으로 바꾸어 푸는 것이 대부분입니다.**

그렇기 때문에 인수분해, 혹은 근의 공식을 이용해 n차방정식을 일차방정식으로 해석하였으며,

로그방정식이나 지수방정식에서도 결국 최종적으로는 일차방정식의 곱으로 바꾸었습니다.

삼각방정식에 대해서는 약간 다르지만, 이 또한 특수각을 암기한 상태에서 적용한 경우였습니다.

위 식의 분자를 일반적인 방정식을 구하는 방식으로 풀기 굉장히 힘듭니다.

이럴 때, 그래프를 그려서 분자가 0을 지나 부호가 바뀔 수 있는지 생각할 수 있습니다.

(그러나, 여기서 중요한 점은, 극값을 정확하게 구할 수 없다면, 과연 x축에 평행한 직선으로 만들어 이동을 해야 하나 싶습니다.

극점에서 접하는 것을 명확하게 알 수 있다는 점이 이 풀이의 장점인데, 풀면서 값을 정확하게 모른다면 장점이 크지는 않을 것 같습니다..)

다음 그래프부터 그려봅시다.

$$y = \frac{x}{x+b}$$

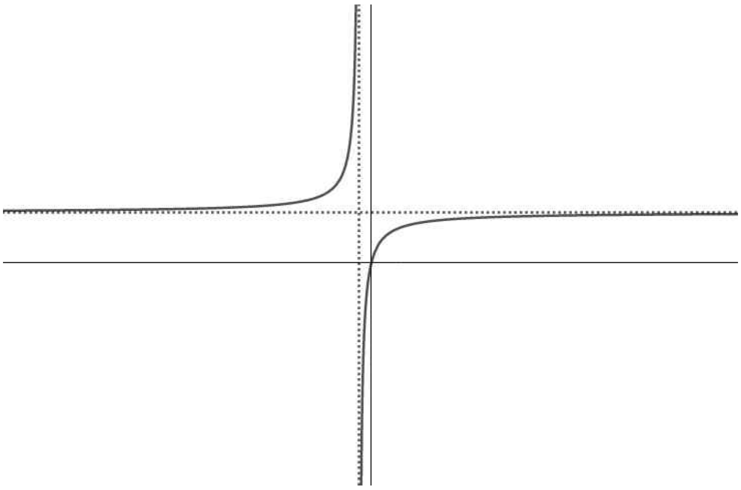
아시다시피, 유리함수에서 점근선을 찾으면 그래프를 그릴 때 굉장히 유리합니다.

점근선 기준으로 그래프를 그려주시면 정말 매우 수월하게 그래프를 그리실 수 있습니다.

이는 쌍곡선과 같은 이차곡선을 그릴 때도 유용하므로 이해해두시면 좋습니다.

점근선은 $x=-b, y=1$ 두개이며, 함숫값은 $x$가 한없이 커질 때 1보다 작습니다.

그러므로 그래프는 다음과 같이 그려집니다.

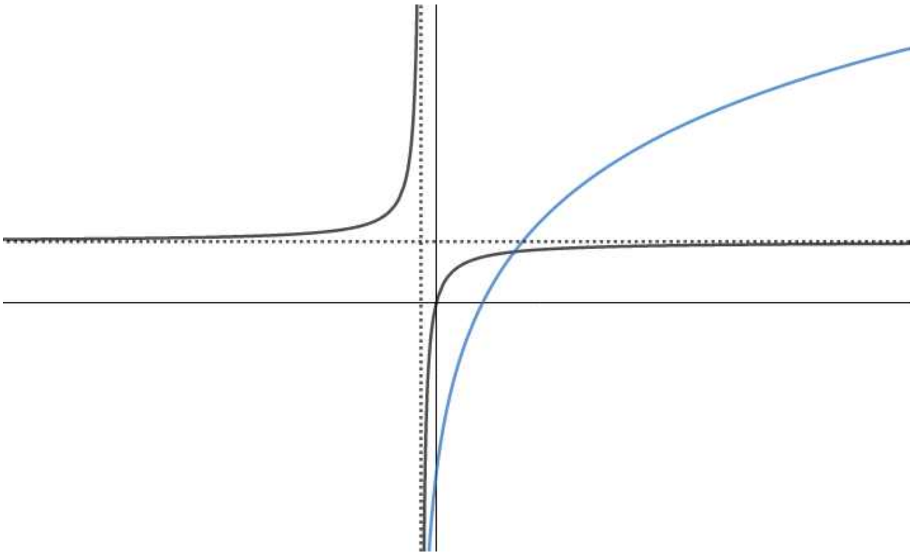


이제, 그 뒤를 그려봅시다.

$y = 2\ln(x+b)$

점근선은 $x = -b$이며, $x$가 한없이 커질 때 무한히 발산합니다.

$2\ln x$ 그래프 그릴 때 마냥 그려주시면 다음과 같습니다.



이 때, 음수인 부분 쪽에서 만나는지 아닌지는 정확하게 알기 힘드나,

$y = \dfrac{\ln(x+b)}{x^2}$ 의 범위가 $x > 0$인 부분이라서 다행이었네요.

$x > 0$인 부분에서 교점은 하나를 가지는 것이 확실합니다.

$\frac{x}{x+b} - 2\ln(x+b)$를 해석해보면, 교점 이전에서는 유리함수의 함숫값이 로그함수의 함숫값보다 크므로

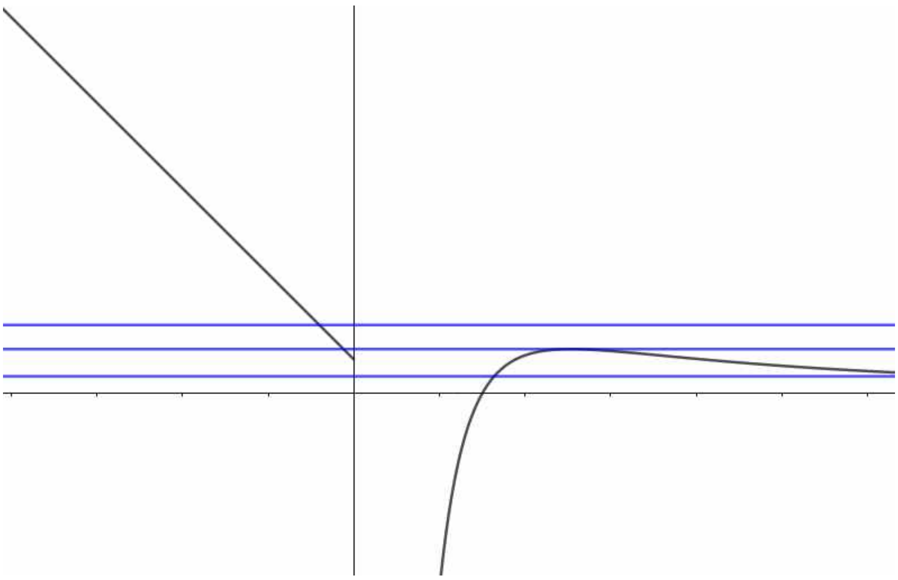
위 식의 값은 0보다 큽니다.

교점 이후에서는 로그함수의 함숫값이 유리함수의 함숫값보다 크므로 0보다 작아지므로,

도함수가 +에서 -로 바뀌는 지점이 1개이며 극댓값 하나를 가지게 됩니다.

이제 그래프를 그려봅시다.

$\frac{f(x)}{x} = m$의 그래프를 그려보면 다음과 같습니다.



이 때, 원래의 방정식 $mx = f(x)$는 $x=0$을 해로 가지게 됨을 다시 기억하길 바랍니다.

또한 $m$의 값이 어떤 값을 가지더라도 항상 $x=0$일 때 방정식을 만족합니다.

즉, 근의 개수는 위 그래프에 보이는 것 보다 1개 더 늘어납니다.

$x$로 나눌 때 $x$가 0이 아님을 가정하고 그래프를 그렸기 때문에 발생하는 현상으로, 고려해주어야 합니다.

$y=\dfrac{\ln(x+b)}{x^2}$부분에서는 $m$이 0을 지날 때, $g(m)$은 1개에서 2개로 늘어나며,

$m$이 함수의 극댓값을 지날 때 2개에서 1개, 극댓값보다 클 때 0개로 값이 줄어듭니다.

$y=-x+a$에서는 $m$이 $a$를 지날 때 $g(m)$은 0개에서 1개로 늘어나게 됩니다.

주어진 식의 조건은 다음과 같습니다.

$$\lim_{m\to\alpha-} g(m)-\lim_{m\to\alpha+} g(m)=1$$

$y=\dfrac{\ln(x+b)}{x^2}$의 극댓값이 $a$이고 $\alpha$가 $a$일 때, 총 교점의 개수 $g(m)$은 3개에서 2개가 되므로

유일하게 위 극한 식을 만족하는 때가 됩니다. 여기서 교점의 개수가 1개씩 늘은 것은 착각이 아닌 (0,0)을 고려한 것입니다.

오직 하나 존재하고, 이 $\alpha$에 대하여 점 $(b, f(b))$는
직선 $y=\alpha x$와 곡선 $y=f(x)$의 교점이다.

에서 알 수 있는 것은 다음과 같습니다.

$$ab=f(b)\Leftrightarrow a=\frac{f(b)}{b}$$

교점은 극댓값일 때이므로, 극댓값의 $x$좌표가 $b$였던 것입니다.

이로써, 도함수의 식과 함수의 식 두개를 활용하여 방정식 두개를 만들 수 있습니다.

$$\frac{\frac{b}{b+b}-2\ln(b+b)}{b^3}=0,\ \frac{\ln(b+b)}{b^2}=a$$

위 식을 정리하면 다음과 같습니다.

$\frac{1}{2} = 2\ln 2b, \ln 2b = ab^2$

$\therefore ab^2 = \ln 2b = \frac{1}{4}$

여기까지가 예전부터 제가 주장해왔던 x축과 평행한 직선을 이동시켜서 교점을 보는 방식이었습니다.

그러나 이 문제에서는 이렇게 풀기가 어려웠던 이유가 몇 가지 있습니다.

1) $y = \frac{\ln(x+b)}{x^2}$ 그래프를 정확하게 그릴 수 있는 방법이 마땅하지 않습니다.

우리가 처음 보는 익숙하지 않은 함수입니다. 이 때 만약 $y = \frac{\ln x}{x^2}$ 그래프를 한번 그려봤다면 더 좋았을 것입니다.

$y = \frac{\ln x}{x^2}$ 의 그래프는 $x = \frac{1}{2}$ 에서 극댓값을 가지므로, 위 함수도 비슷한 개형을 가지지 않을까 추측 정도는 할 수 있을 것입니다.

2)

$\lim_{m \to \alpha -} g(m) - \lim_{m \to \alpha +} g(m) = 1$ 의 의미가 무엇인지 모르고 문제를 접근하는 시간이 많습니다.

그래프의 개형이 대략적으로 나오지 않는다면 위 극한식의 의미를 이해할 수 없을 가능성이 많으며,

이것은 1)과도 연관되어 문제의 해석을 어렵게 합니다.

만약 그래프의 개형을 어느 정도 빠르게 그릴 수 있다면 이러한 풀이는 굉장히 유용한 풀이가 됩니다.

3) (0,0)을 항상 지나는 문제의 상황 때문에 $x$로 나눌 때 교점이 항상 한 개 더 추가가 된다는 사실을 기억해야합니다.

이전의 문제에서는 (0,0)이 문제의 상황과 상관없는 경우가 많았습니다. 지금은 이러한 상황을 항상 고려해야 하겠네요.

4) 극값을 정확하게 구할 수 없다면, x축에 평행한 직선으로 만들어 이동을 한다고 해도 어디에 접하는지 모릅니다.

극점에서 접하는 것을 명확하게 알 수 있다는 점이 이 풀이의 장점인데, 풀면서 값을 정확하게 모른다면 장점이 크지는 않을 것 같습니다..

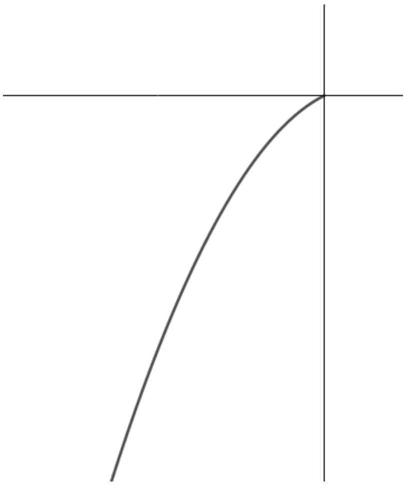
이러한 어려움이 있는 상태입니다. 만약 이렇게 풀 수 있으려면, 어느 정도 그래프에 대한 연습이 꽤 많이 되어야겠군요.

------------------------------------------------------------------------------

그렇다면, 다음의 풀이도 봅시다.

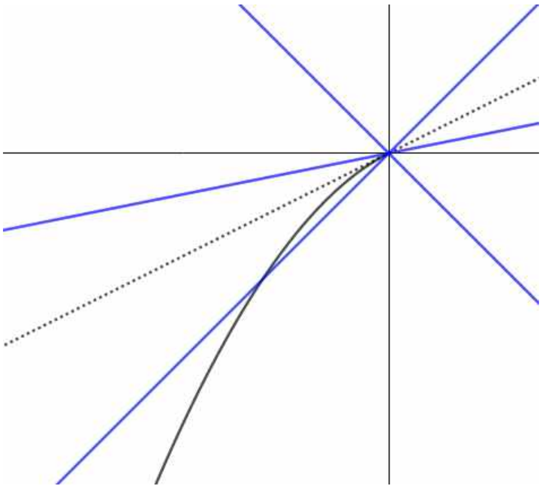
풀이 2)
$y=-x^2+ax\,(x\le 0)$의 그래프는 너무나도 쉽게 그릴 수 있습니다.

$a$가 양수이며, 정의된 $x$값은 0 이하의 실수입니다. 즉 다음과 같이 그려집니다.



이 때, (0,0)을 항상 지나며, 이 점의 접선을 기준으로, 그 기울기보다 커지면 2개의 교점, 작을 때는 항상 1개의 교점을 갖습니다.

그림으로 표현하면 다음과 같습니다. 다음 그림에서 접선은 점선으로 표시되어 있습니다.



즉, $\lim_{m \to \alpha-} g(m) - \lim_{m \to \alpha+} g(m) = 1$식에서, 적어도 $x$가 0 이하인 부분에서는

접선의 기울기가 $\alpha$인 경우에는 -1

그 외의 기울기에서는 0의 값을 가짐을 알 수 있습니다.

**(실제로, 이렇게 식의 의미를 문제풀이 중간에 파악할 수 있다는 점은 굉장히 큰 이점입니다.**

여러분이 문제를 풀 때, 무엇을 하고 있는지 모르면서 풀이를 진행하는 경우가 간혹 있기 때문에,
이렇게 식의 의미를 정확하게 해석하고 알면서 진행하는 방향으로 접근하시는 것이 좋습니다.
물론, 이것을 가능하게 하는 것은 0 이하 범위에서 이차함수의 근이 0 하나여서 그래프 개형이 거의 변하지 않는 점이 큽니다.
만약 실제로 문제를 푸는 저라면 이러한 확실한 부분에서부터 분석을 시작하겠습니다.)

그렇다면 $x>0$ 범위의 그래프도 그려볼까요?

$$y=\frac{\ln(x+b)}{x}\ (x>0)$$

이 또한 그래프를 그리기 너무나도 어렵습니다.

그러나 우리는 교과서에서 다음과 같은 그래프를 그렸습니다.

**실근의 개수를 어떻게 구할 수 있는가?**

$\ln x=kx$에서 $x>0$이고 $\frac{\ln x}{x}=k$이므로 곡선 $y=\frac{\ln x}{x}$와 직선 $y=k$의 교점의 개수를 조사한다.

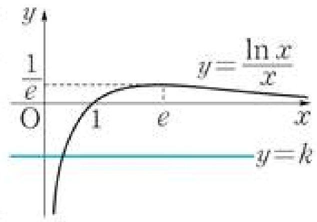
**함수 $y=\frac{\ln x}{x}$의 그래프의 개형을 그린다.**

$f(x)=\frac{\ln x}{x}$라고 하면 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=e$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $e$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $\frac{1}{e}$ (극대) | $\searrow$ |




또 $\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x}=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$이므로 함수 $y=\frac{\ln x}{x}$의 그래프의 개형은 위의 그림과 같다.

(출처 : 2015학년도 개정 비상 미적분 교과서)

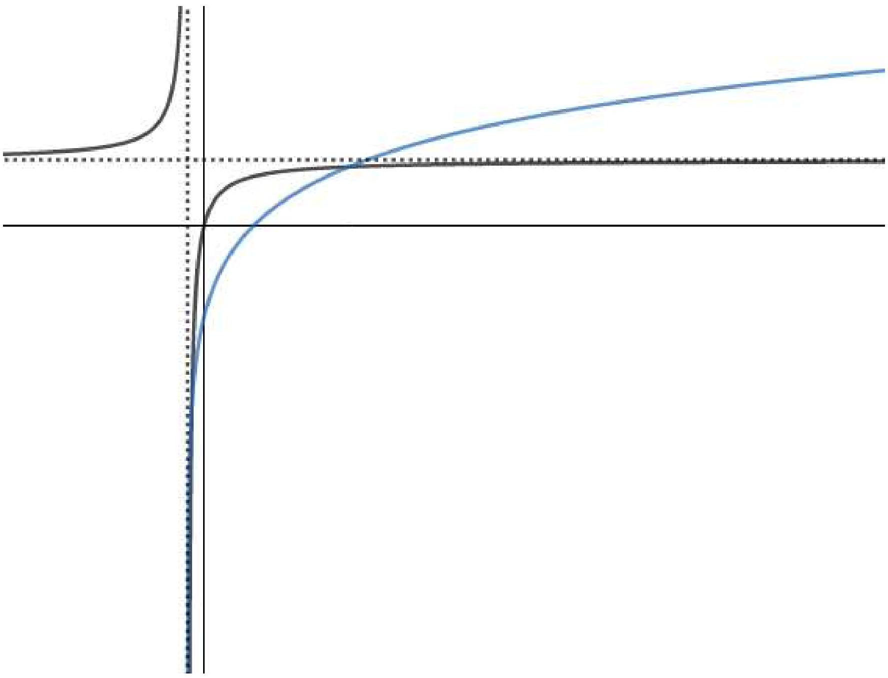
우리는 $y=\dfrac{\ln(x+b)}{x}$ $(x>0)$를 그려본 적은 없지만, $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 을 한번쯤 그려본 적은 있습니다.

완벽하게 같다는 보장은 할 수 없지만, 그래프의 개형은 극댓값이 하나 있고, x값이 한없이 커지면 0, 한없이 0에 가까워지면 음의 무한대로 발산한다고 추측할 수는 있습니다.

물론 정확한 검증을 위해서 그려보도록 합시다.

$y' = \dfrac{\dfrac{x}{x+b}-\ln(x+b)}{x^2}$ 이므로,

$\dfrac{x}{x+b}$와 $\ln(x+b)$를 그려보도록 합시다.



이 때, 음수인 부분 쪽에서 만나는지 아닌지는 정확하게 알기 힘드나,

$y=\dfrac{\ln(x+b)}{x}$ 의 범위가 $x>0$인 부분이라서 다행입니다.

$x>0$인 부분에서 교점은 하나를 가지는 것이 확실합니다.

$\dfrac{x}{x+b}-\ln(x+b)$를 해석해보면, 교점 이전에서는 유리함수의 함숫값이 로그함수의 함숫값보다 크므로

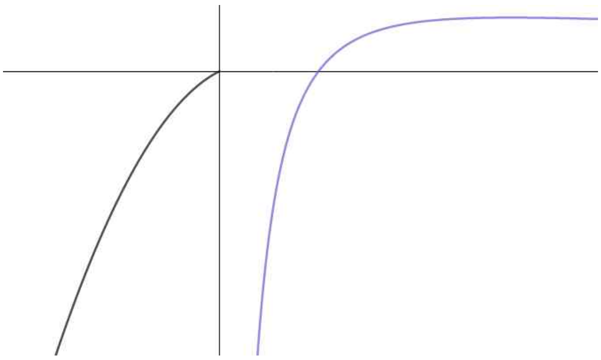
위 식의 값은 0보다 큽니다.

교점 이후에서는 로그함수의 함숫값이 유리함수의 함숫값보다 크므로 0보다 작아지므로,

도함수가 +에서 -로 바뀌는 지점이 1개이며 극댓값 하나를 가지게 됩니다.

의도치 않게 방금 추측했던 대로 $y=\dfrac{\ln x}{x}$의 그래프의 개형과 거의 비슷한 것 같습니다!

따라서 그래프는 다음과 같습니다.



이 때, $g(m)$이 $x>0$ 일 때는 어떤 양상으로 달라지는지 확인해보아야 합니다.

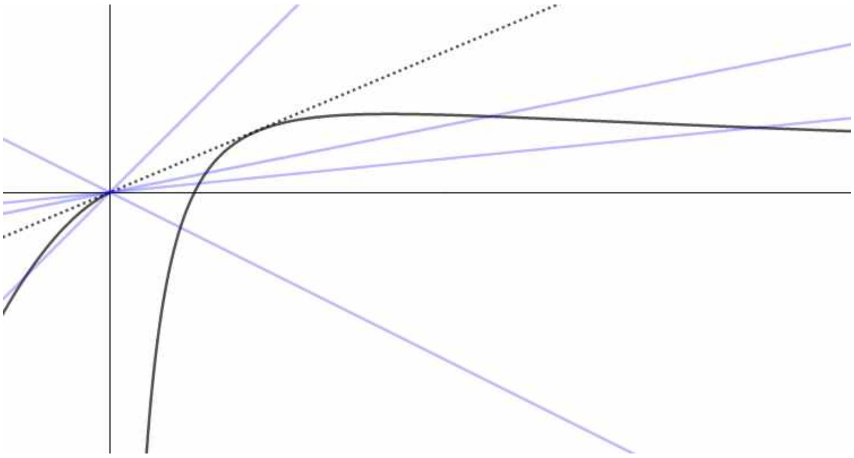
이때는 $y=mx$에서 $m$을 충분히 많이 변화시켜보는 것으로 추측할 수 있습니다.

접선일 때는 점선으로 표시하였습니다.

기울기가 음수일 때는 교점은 1개

기울기가 접선의 기울기 이하일 때의 양수일 때는 교점이 2개

기울기가 접선의 기울기 이상일 때는 교점이 0개입니다.



(머릿속으로 $m$의 값이 연속적으로 변할 때의 상황을 떠올리셔야합니다.)

즉, $x>0$일 때, $\lim_{m\to\alpha-}g(m)-\lim_{m\to\alpha+}g(m)=1$식에서 알파가 0일 때는 -1값을 가지며

알파가 접선의 기울기와 같을 때는 2, 그 외의 값에서는 0을 가짐을 알 수 있습니다.

이제, $x$가 모든 실수일 때의 상황을 생각해봅시다.

만약 알파의 값이 $y=-x^2+ax\,(x\le 0)$의 x=0에서의 접선의 기울기인 $a$와 같다면

-1의 값을 가지며, 이 값이 $x>0$일 때의 그래프의 접선의 기울기와 같다면 2를 더하여 1의 값이 나올 수 있습니다.

다른 경우는 0, -1의 값을 가질 수 있습니다.

만약 알파의 값이 $y=-x^2+ax\,(x\le 0)$의 $x=0$에서의 접선의 기울기가 아니라면

-1, 2, 0의 값을 가질 수 있습니다.

이제 문제의 상황은 원점에서 $y=\dfrac{\ln(x+b)}{x}$에 그은 접선을 구하는 것으로 바뀌었습니다.

그 접선은 $(b,f(b))$를 지나므로 $f'(b)=a, f(b)=ab$입니다. 즉 다음과 같이 마무리를 할 수 있겠습

니다.

$$f'(b)=\frac{\frac{b}{b+b}-2\ln(b+b)}{b^2}=a \Rightarrow \frac{1}{2}-2\ln 2b=ab^2,$$

$$f(b)=\frac{\ln(b+b)}{b}=ab \Rightarrow \ln 2b=ab^2$$

$$\ln 2b=\frac{1}{2}-\ln 2b \quad \therefore ab^2=\ln 2b=\frac{1}{4}$$

자신의 풀이와 비교하면서 읽어보도록 합시다.

이 문제에서는 몇 가지 생각해볼 점이 있습니다.

**1. 먼저 직관적으로 바로 두 곡선에 동시에 접하는 직선을 가정한 학생이라면 반성하셔야합니다.**

물론 그렇게 하셔서 문제를 수월하게 풀 수 있었을 것입니다.
하지만, 그 전에 이 문항의 경우, $y=\frac{\ln(x+b)}{x}$ 의 그래프의 개형을 확실하게 해야 하였고,
그 이후에 0 이하일 때와 0 이상일 때의 f(x)의 상황을 정확하게 분석했어야 했습니다.

실제로는 그렇지 않았지만, 만약 $y=\frac{\ln(x+b)}{x}$ 의 극값이 여러 개 나왔다면 어땠을까요?
그 가능성이 없다고 단언할 수 있었을까요? 저는 잘 모르겠습니다.
그래프의 개형에 대해 진지한 고민을 해보지 않고는 실전에서 어이없게 낚일 수도 있는 것입니다.

**2. $y=\frac{\ln x}{x}$ 의 그래프와 비슷할 것으로 추측한 학생이라면, 충분히 설득력 있는 풀이를 진행했을 것입니다.**

물론 그조차도 그래프를 추측 수준으로 떠올린 것이긴 합니다.
확실하게 하려면, 극값이 하나 생김을 증명하고 진행해야 합니다.
그러나 아예 그래프의 개형에 대한 고민을 하지 않는 것보다는 나을 것입니다.

**3. 이 문제에서는 풀이 2)가 풀이 1)보다 더 떠올리기 쉬웠을 것입니다.**

그 이유로는 해설에도 적어놓았지만, 몇 가지를 적어보면 x가 0이 아니라고 가정하고 나눌 필요가 없다는 점,
문제에 제시된 극한식의 의미를 풀이 중간에 이해할 수 있다는 점,
$y=\dfrac{\ln x}{x}$ 를 경험해본 적이 있는 점.

등이 있습니다.

즉, 기울기를 변화시켜가면서 교점의 개수를 관찰하는 방법은 충분히 익혀두어야할 것입니다.
좀 더 보기 편하고 확실한 방법은 물론 x축에 평행한 직선의 평행이동으로 관찰하는 것이지만,
이 방법 또한 극값에 접하며, 움직이기 편한 장점으로 사용하는 것인데, 어차피 극값을 정확하게 구하기도 힘듭니다.
즉, 도구의 장점이 그렇게 크지 않을 것입니다.

각 도구들의 장점과 주의사항은 이번에 나온 책의 행동영역특강에 서술된 내용입니다.
도구들의 장점과 주의사항을 이해하고 문제풀이에 적용하시길 바랍니다.

**4. 문제풀이에는 모범적인 순서가 분명 있습니다.**

풀이 2)에서는 먼저 이차함수의 개형이 확실함을 알고 시작해야했습니다.
그 후, 극한식의 상황을 대입하여 접선을 기준으로 교점의 변화를 관찰할 수 있었다면 매우 수월했을 것입니다.
이 경우, 확실한 0 이하의 $x$값에 대한 $f(x)$의 그래프와 극한식의 의미를 이해하면서 풀 수 있었을 것입니다.

풀이 1)의 경우에는 함수의 개형을 먼저 그려내는 것이 무엇보다 중요했습니다.
당연히 극값의 위치가 어디일지를 알아야 해결 가능한 풀이였으므로 그래프를 어느 정도 그려야했습니다.
물론, 그래프를 그릴 때까지 답답한 면이 있겠으나, 이 또한 좋은 풀이가 될 것입니다.

여담으로 저는 풀이 2)의 방식으로 처음 떠올렸으며, 지금도 평가원의 의도는 아마 풀이 2)의 방식이라 생각합니다.

--------------------------------------------------------------------------------

이제 이 해설을 쓴 이유를 여러분께 말씀드리겠습니다.
저는 교과서와 기출 제본으로 공부했다고 말씀드렸습니다.
해설이 없어서 해설을 썼다고 말씀드렸습니다.

이제, 여러분이 문제를 분석하고 복습하실 때,
그리고 여러 가지 풀이를 두고 고민하실 때 당연하게 하셔야할 것이 있습니다.

**문제풀이의 첫 접근과 풀이의 과정이 논리적인지, 설득력이 있는지에 대한 질문을 스스로 충분히 하셔야합니다.**
**여러분이 엄밀함이라는 단어를 들으면 쉽게 감이 오지 않을 것입니다.**

**엄밀함의 근거는 어디에서 나올까요? 그 근거는 역시 교과서입니다.**
**그것을 바탕으로 풀었을 때 풀이의 과정이 당연해야하며, 여러 가지 떠오르는 의문들을 충분히 해소할 수 있어야합니다.**
**풀이가 당연하지 않고, 무언가 이해할 수 없다면, 다른 풀이가 설득력이 있는 이유를 고민해보세요.**

**위에서 상기하였듯, 저는 여러 가지 이유를 들어 풀이 2)가 설득력 있는 이유를 적어놓았습니다.**
**이러한 과정이 쌓이면, 시험장에서 가장 설득력 있는 풀이가 가능할 것입니다.**
**그 때, 시험 중에서의 여러분의 확신이라던가... 검토의 유용함이라던가... 이런 장점들은 굳이 말하지 않아도 느낄 겁니다.**

**사실 엄밀함이라는 단어는 별거 없습니다. 정말 쉽고 단순하게 답하면 본인이 공감할 수 있는 풀이가 엄밀한 것이지요.**
**본인이 공감할 수 있는 풀이가 되려면, 풀이과정에서 드는 의문들을 항상 고민하고 해결했어야합니다.**
**이 장문의 해설을 시험장에서 써내려가는 것은 어려울 수 있으나, 적어도 공부할 때는 하셔야합니다.**

**사실 제가 학생들에게 제일 많이 강조하고 권하는 공부의 방법은 해설 써보기 입니다.**
**실제로 만날 기회가 있는 학생들에게는, 그 해설의 이유를 정말 많이 강조했었지요.**

또한 이 방법이 제 실력을 끌어올려준 거의 유일한 비법이었던 것 같습니다.