제 2 교시

2013학년도 대학수학능력시험 11월 모의평가 문제지

수리 영역(가 형)

홀수형

성명	

수험 번호					—				

○ 자신이 선택한 유형('가'형/'나'형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

한국교육과정평가원

제 2 교시

수리 영역(가 형)

홀수형

5지선다형

1. $\log_2 18 + 2\log_2 \frac{\sqrt{2}}{3}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A + A^{-1}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

3. 두 사건 A와 B는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{2},\ \mathrm{P}(A \cup B) = \frac{5}{8}$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

4. 좌표공간에서 두 평면 $x + 2y - z = 1$, $x - y + 2z = 3$이 이루는 예각의 크기는? [3점]

① $\frac{1}{12}\pi$ ② $\frac{1}{6}\pi$ ③ $\frac{1}{4}\pi$ ④ $\frac{1}{3}\pi$ ⑤ $\frac{5}{12}\pi$

5. 무리방정식

$$2\sqrt{x^2-2x+6}-x^2+2x=3$$

의 모든 실근의 곱은? [3점]

① -9 ② -7 ③ -5 ④ -3 ⑤ -1

6. 흰색 깃발 4개, 파란색 깃발 4개를 일렬로 모두 나열할 때, 양 끝에 놓인 깃발의 색이 같은 경우의 수는? (단, 같은 색 깃발끼리는 서로 구별하지 않는다.) [3점]

① 24 ② 27 ③ 30 ④ 33 ⑤ 36

7. 화학반응이 평형에 도달했을 때의 반응물과 생성물의 농도비는 평형상수에 의해 결정된다. 온도 T_0일 때의 평형상수를 K_0라 하면 온도가 T일 때의 평형상수 K는 다음 식을 만족시킨다.

$$\log K=\log K_0+A\left(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T}\right)$$ (단, A는 양의 상수)

온도가 $2T_0$일 때의 평형상수는 $4K_0$이다. 온도가 $3T_0$일 때의 평형상수를 aK_0라 할 때, a의 값은? [3점]

① $2^{\frac{7}{3}}$ ② $2^{\frac{8}{3}}$ ③ 2^3
④ $2^{\frac{10}{3}}$ ⑤ $2^{\frac{11}{3}}$

8. 역변환이 존재하는 일차변환 f와 2×1행렬 A, B에 대하여 $f(A)=2B$, $f(B)=2A$이다. $A+B=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$일 때, 행렬 $f^{-1}(A+B)$의 모든 성분의 합은? [3점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

9. 일차변환 f를 나타내는 행렬이

$$A=\begin{pmatrix}k&0\\0&1\end{pmatrix}$$

이다. 원 $x^2+y^2=1$이 일차변환 f에 의하여 옮겨진 도형이 영역 $\{(x,y)|x+3y-6\le0\}$에 포함되도록 하는 양수 k의 최댓값은? [3점]

① $\sqrt{15}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{21}$
④ $2\sqrt{6}$ ⑤ $3\sqrt{3}$

10. 좌표평면에서 곡선 $y=\ln(x^2+2x+1)$과 x축 및 직선 $y=4$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $4e^2-4$ ② $4e^2-2$ ③ $4e^2$
④ $4e^2+2$ ⑤ $4e^2+4$

11. 좌표평면에서 직선 $y=mx\ (0<m<2)$가 원 $x^2+y^2=1$과 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 점 A에서 직선 $y=2x$에 내린 수선의 발을 H라 하자. 원점 O에 대하여 $\overline{\mathrm{OH}}+\overline{\mathrm{AH}}$의 값이 최대가 되도록 하는 m의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

12. 어느 고등학교 학생들의 하루 인터넷 사용시간은 평균이 60분, 표준편차가 25분인 정규분포를 따른다고 한다. 하루 인터넷 사용시간이 92분 이상인 학생의 60%, 92분 미만인 학생의 50%는 남학생이라고 한다. 이 고등학교 남학생 중에서 임의로 1명을 선택할 때, 이 학생의 하루 인터넷 사용시간이 92분 이상일 확률은? (단, Z가 표준정규분포를 따를 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.28)=0.4$로 계산한다.) [3점]

① $\frac{5}{51}$ ② $\frac{6}{51}$ ③ $\frac{7}{51}$ ④ $\frac{8}{51}$ ⑤ $\frac{9}{51}$

13. 상자 A에는 검은 공 2개, 흰 공 1개가 들어 있고, 상자 B에는 검은 공 1개, 흰 공 2개가 들어 있다. 상자 A, B에서 각각 1개의 공을 꺼내 두 공의 색이 같으면 [실행 1]을, 두 공의 색이 다르면 [실행 2]를 한다.

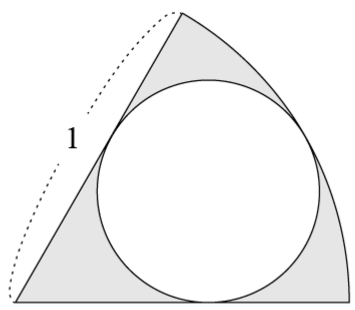
[실행 1] 상자 A에서 임의로 1개의 공을 더 꺼낸다. [실행 2] 상자 B에서 임의로 1개의 공을 더 꺼낸다.

마지막으로 꺼낸 공이 검은 공일 확률은? [3점]

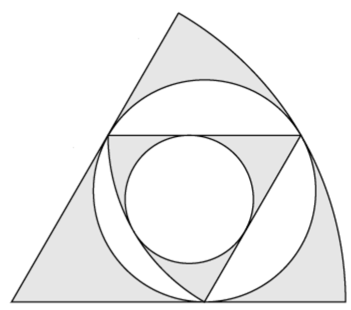
① $\frac{1}{9}$　② $\frac{2}{9}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{4}{9}$　⑤ $\frac{5}{9}$

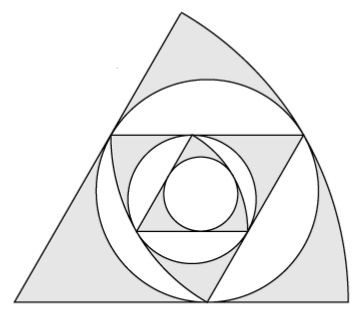
14. 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴이 있다. 이 부채꼴에 내접하는 원을 그리고, 부채꼴의 내부와 원의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 원에 내접하도록 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴을 그린다. 새로 그려진 부채꼴에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 원을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 반복하여 n번째 얻은 그림 R_n에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1


R_2


R_3

……

① $\frac{1}{12}\pi$　② $\frac{1}{6}\pi$　③ $\frac{1}{4}\pi$
④ $\frac{1}{3}\pi$　⑤ $\frac{5}{12}\pi$

15. 이차정사각행렬 X의 모든 성분의 합을 $S(X)$라고 하고, 집합 M을 다음과 같이 정의하자.

$$M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b\text{는 실수}\right\}$$

집합 M의 두 원소 A, B에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $AB=BA$

ㄴ. $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$이면 $S(A)=p+q$이다.

ㄷ. $S\left((AB)^7\right)=\dfrac{1}{2^{13}}\{S(A)S(B)\}^7$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 정의역이 $\{x\,|\,x>-1\}$인 함수 $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1+t^3)^2}\,dt$의 역함수를 $g(x)$라고 하자. $f(1)=k$일 때, $\displaystyle\int_0^k \{g(x)\}^2\,dx$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

17. 함수 $a(n)$은 $a(1)=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a(2n)=a(n),\ a(2n+1)=a(n)+1$$

을 만족시킨다. $S_n=\sum_{k=1}^{2^n-1}a(k)$라 하자. 다음은 수열 $\{S_n\}$의 일반항을 구하는 과정의 일부이다.

> 수열 $\{b_n\}$을 다음과 같이 정의하자.
>
> $b_n=S_{n+1}-S_n \quad (n\ge 1)$
>
> 그러면 $b_1=3$이고,
>
> $$\begin{aligned} b_{n+1} &= S_{n+2}-S_{n+1} \\ &= a(2^{n+1})+a(2^{n+1}+1)+\dots+a(2^{n+2}-1) \\ &= a(2^n)+\{a(2^n)+1\}+\dots+\{a(\boxed{(가)})+1\} \\ &= 2b_n+2^n \end{aligned}$$
>
> 이다. 양변을 2^{n+1}으로 나누면
>
> $$\frac{b_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{b_n}{2^n}+\frac{1}{2} \quad (n\ge 1)$$
>
> $$\frac{b_n}{2^n}=\boxed{(나)}$$
>
> 따라서
>
> $$b_n=2^n\boxed{(나)}$$
>
> $$\begin{aligned} S_n &= S_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k \\ &= S_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left((k+1)2^k-\boxed{(다)}\right) \end{aligned}$$
>
> $\vdots$

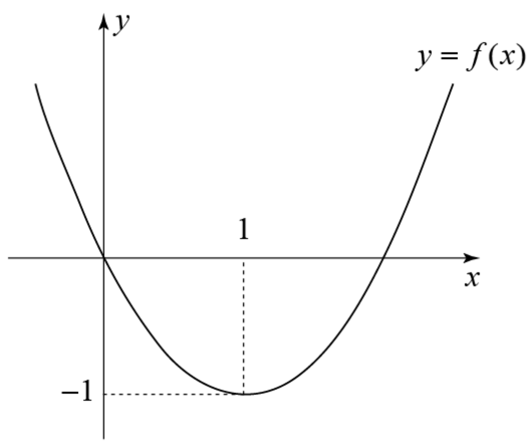
위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(k)$이라 할 때, $\dfrac{f(3)}{g(1)h(1)}$의 값은? [4점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

18. 평면 α 위에 정삼각형 ABQ가 있다. 평면 α 밖의 한 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발이 점 Q이다. $\angle$APB의 크기를 θ라 하면 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$이다. 삼각형 ABP의 넓이가 10일 때, 삼각형 ABQ의 넓이는? [4점]

① $\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{3}$ ④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

19. 원점을 지나고 꼭짓점의 좌표가 $(1, -1)$인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



방정식 $\dfrac{1}{f(f(x))}-\dfrac{1}{f(x)}=1-\dfrac{f(x)}{f(f(x))}$의 모든 실근의 합은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

20. 실수 a에 대하여 점 $(0, a)$를 지나고 기울기가 m $(m<0)$인 직선이 곡선 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$와 만나는 점의 개수를 $f(a)$라 하자. 함수 $f(a)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되게 하는 실수 m의 최댓값은? [4점]

① $-\dfrac{1}{6}$ ② $-\dfrac{1}{7}$ ③ $-\dfrac{1}{8}$ ④ $-\dfrac{1}{9}$ ⑤ $-\dfrac{1}{10}$

21. 최고차항의 계수가 1이고, $f'(0)=1$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 집합 S를

$$S=\{m \mid \text{모든 실수 } x\text{에 대하여 } f(x) \geq m(x-t)+f(t)\}$$

라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=-1$과 $t=2$에서만 불연속일 때, $f'(3)$의 값은? [4점]

① 35 ② 37 ③ 39 ④ 41 ⑤ 43

단답형

22. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+a_3+a_5=21$, $a_2+a_4+a_6=30$일 때, a_5의 값을 구하시오. [3점]

23. 다항식 $(3x^2+a)^5$의 전개식에서 x^2의 계수와 x^4의 계수가 같을 때, 양의 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

24. x에 대한 분수부등식 $\frac{2}{x} \leq \frac{1}{x-k}$을 만족시키는 자연수 x의 개수가 3이 되도록 하는 자연수 k의 값을 구하시오. [3점]

25. 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^{k+2}} & (|x|>1) \\ -x^2+a & (|x|\leq 1) \end{cases}$$

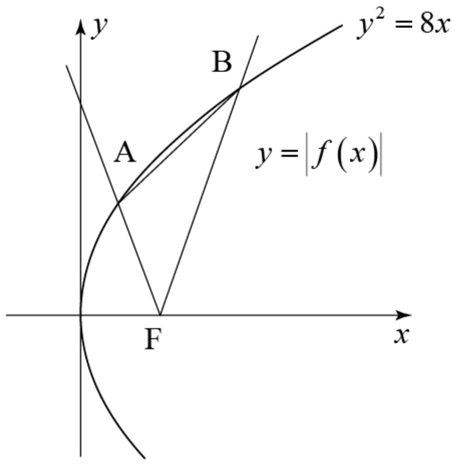
이다. $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 a에 대하여 $60a$의 값을 구하시오. [3점]

26. 평면 α로부터의 거리가 2인 점 P가 있다. 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 점 H라 하자. 평면 α 위의 두 점 A, B가

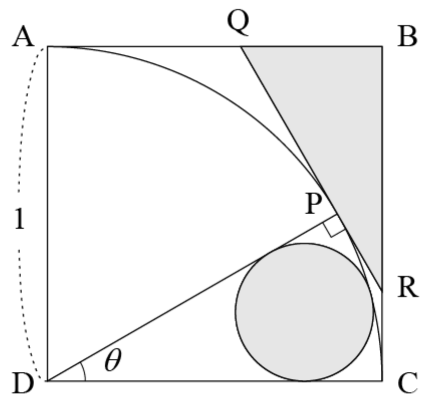
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AH}}=1,\ \overrightarrow{\mathrm{BP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BH}}=4$$

를 만족한다. $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$의 최솟값을 m이라 할 때, m^2의 값을 구하시오. [4점]

27. 포물선 $y^2=8x$의 초점을 F라 하자. 일차함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 F를 지난다. 함수 $y=|f(x)|$의 그래프가 포물선과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{FA}}:\overline{\mathrm{FB}}=1:2$이다. 삼각형 ABF의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오. [4점]



28. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 점 D를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 사분원 위에 점 P가 있다. 점 P에서의 접선이 선분 AB와 만나는 점을 Q라 하고, 선분 BC와 만나는 점을 R이라 하자. $\angle \mathrm{PDC}=\theta$일 때, 부채꼴 DCP에 내접하는 원의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 BQR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{f(\theta)}{\theta\times g(\theta)}=a\pi$일 때, $60a$의 값을 구하시오. [4점]



29. 삼차함수 $f(x)=x^3-3x^2+4x-2$가 있다. 실수 t에 대하여 $\{f(x)-t\}(x-t)\leq 0$을 만족하는 x의 최댓값을 $g(t)$라고 하자. $\int_0^3 g(t)\,dt=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 자연수 m에 대하여 $f(m)$을 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수라고 하자.

> (가) $1\leq a\leq m$, $1\leq b\leq m$
> (나) $\log_2 a-\log_2 b$는 정수이다.

예를 들어 $f(8)=22$이다. $\lim_{n\to\infty}\frac{f(2^{n+1})-f(2^n)}{f(2^{n+2})}=\frac{q}{p}$일 때, p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.