

[나승민/한성은 모의고사]

| 6월 모의고사(나형) 연습 (1/2) |

| 나승민 (성균관대 수학과)

이투스앤써, 이투스 네오
수학에 감각을 더하다.
Youtube #매 민TV
instagram @cremath_david

| 한성은 (POSTECH 수학과)

이투스앤써, 일산 종로, 일산 클라비스, 5A ACADEMY
코로나19발 범위 변경을 반영하였습니다.
올해 수능은 치겠죠? 공부 열심히 하세요.
hansungeun.com
- 저자소개, 학습자료, 교재판매

| CCL

- 허락 없이 문제를 쓰실 수 있지만, 출처를 반드시 표시해 주세요.
- 자신이 저작자라는 주장을 하지 말아 주세요.

수학 영역(나형)

1

5지선다형

1. $\sqrt[3]{4} \times 4^{\frac{1}{6}}$ 의 값은? [2점]

- ① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$
④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x+1}-1}{x}$ 의 값은? [2점]

- ① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{4}{3}$
④ 1 ⑤ 2

3. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이고 $\sin\theta = \frac{\sqrt{11}}{6}$ 일 때, $\cos\theta$ 의 값은? [2점]

- ① $-\frac{1}{6}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$
④ $-\frac{5}{6}$ ⑤ $-\frac{7}{6}$

4. 두 사건 A, B 에 대하여 A 와 B 는 서로 배반사건이고

$$P(A \cup B) = 5P(B) = 1$$

일 때, $P(A)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$
④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

2

수학 영역(나형)

5. 세 수 $\frac{21}{12}$, x , $\frac{39}{12}$ 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, x 의 값은? [3점]

- ① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ $\frac{17}{6}$
 ④ 3 ⑤ $\frac{19}{6}$

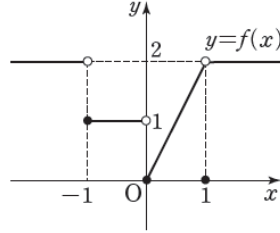
6. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k - 3) = 80, \quad \sum_{k=1}^{10} (a_k + 3b_k) = 200$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10} (2a_k + b_k)$ 의 값은? [3점]

- ① 250 ② 275 ③ 300
 ④ 325 ⑤ 350

7. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(-x)$ 의 값은? [3점]

- ① -2 ② -1 ③ 0
 ④ 1 ⑤ 2

8. 두 양수 a, b 에 대하여 $\log_{\sqrt{2}}a = \log_3b = \log_24$ 일 때,
 $\log_3(a+b)$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

10. 다항함수 $f(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - 2x^2 - 1}{x-1} = f(1)$ 을

만족시킬 때, $f(1)+f'(1)$ 의 값은? [3점]

- ① 3 ② 7 ③ 5
 ④ 6 ⑤

9. $-1 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+4x}$ 의 최댓값을 M ,

최솟값을 m 이라 할 때, $M \times m$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
 ④ 2 ⑤ 4

11. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 t 에서의 위치는

$$x(t) = -t^3 + 2t^2 + at$$

이다. $t=4$ 에서 점 P의 운동 방향이 바뀔 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① 32 ② 28 ③ 24
 ④ 20 ⑤ 16

12. 두 함수 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 - ax + a$ 에 대하여

함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위한

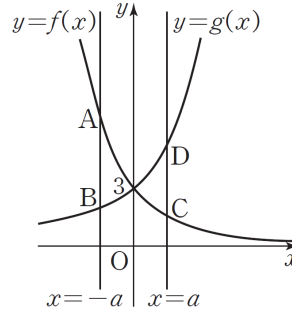
모든 정수 a 의 값의 합은? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5
 ④ 6 ⑤ 7

13. 한 개의 주사위를 두 번 던진다. 6의 눈이 한 번도 나오지 않을 때, 나온 두 눈의 수의 합이 3의 배수일 확률은? [3점]

- ① $\frac{9}{25}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{11}{25}$
- ④ $\frac{12}{25}$ ⑤ $\frac{13}{25}$

14. 두 함수 $f(x) = \frac{3}{2^x}$, $g(x) = 2^{x+1} + 1$ 이 있다. 그림과 같이 직선 $x = -a$ 가 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $x = a$ 가 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. $2\overline{AB} + \overline{CD} = 54$ 일 때, 양수 a 의 값은? [4점]



- ① $-1 + \log_2 5$ ② $\log_2 7$ ③ $-1 + 2\log_2 3$
- ④ $\log_2 5$ ⑤ $1 + \log_2 7$

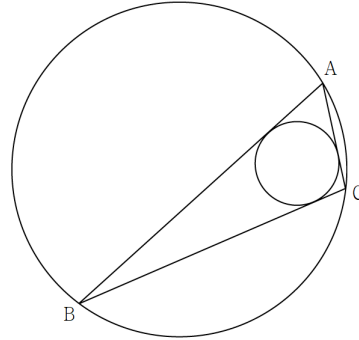
6

수학 영역(나형)

15. 자연수 p 에 대하여 다항식 $(x+p)^8$ 의 전개식에서 x^k 의 계수를 a_k 라 하자. 서로 다른 세 수 a_1, a_2, a_3 중 최댓값이 a_2 일 때, a_6 의 값은? [4점]

- ① 126 ② 168 ③ 252
 ④ 336 ⑤ 504

16. 반지름의 길이가 $4\sqrt{3}$ 인 원에 내접하는 삼각형 ABC에 대하여 $\angle BAC = 60^\circ$ 이고 삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{3}$ 이다. $\overline{AB} + \overline{AC}$ 의 값은? [4점]



- ① 16 ② 17 ③ 18
 ④ 19 ⑤ 20

17. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_k^3 = 2 \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2$$

를 만족시킨다. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $a_1 = 2$

ㄴ. 모든 자연수 n 에 대하여

$$(a_{n+1})^2 = 2a_{n+1} + 4 \sum_{k=1}^n a_k \text{ 이다.}$$

ㄷ. 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n = 2n$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여

함수 $f: X \rightarrow X$ 는 다음 두 조건을 만족시킨다.

- (가) 집합 X 의 원소 i 에 대하여 $f(f(i)) = f(i)$ 이다.
 (나) 합성함수 $f \circ f$ 의 치역의 원소의 개수는 4 이상이다.

다음은 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수를 구하는 과정이다.

함수 f 의 치역을 A 라 하자. 집합 A 의 원소 a 에 대하여 $f(b) = a$ 인 집합 X 의 원소 b 가 존재하므로 $f(a) = a$ 이다. 따라서 집합 A 의 원소의 개수가 k 개일 때, 함수 $f \circ f$ 의 치역의 원소의 개수는 $\boxed{\text{가}}$ 이다.

6 이하의 자연수 k 에 대하여 $n(A) = k$ 인 집합 X 의 부분집합 A 를 선택하는 경우의 수는 $\boxed{\text{나}}$ 이다.

정의역의 원소 중 집합 A 에 속하지 않는 $(6-k)$ 개의 원소들은 각각 k 개의 함숫값 중 하나를 가질 수 있으므로, 이 $(6-k)$ 개의 원소가 함숫값을 선택하는 경우의 수는 $\boxed{\text{다}}$ 이다.

구하는 경우의 수는 $\sum_{k=4}^6 \{ \boxed{\text{나}} \times \boxed{\text{다}} \}$ 인 271이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$, $h(k)$ 라 할 때, $f(6) + g(5) + h(4)$ 의 값은? [4점]

- ① 24 ② 26 ③ 28
 ④ 30 ⑤ 32

19. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 구간 $[0, 4)$ 에서 $f(x) = ax(x-3)^2$ 이다.
 (나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(x-4) + 3$ 이다.

곡선 $y = f(x)$ 에 대하여 $\int_{-8}^8 |f(x)| dx$ 의 값은?

(단, a 는 상수이다.) [4점]

- ① 46 ② 48 ③ 50
 ④ 52 ⑤ 54

20. 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

열린 구간 $(-\infty, 2)$ 에서 $f'(x) > 0$,
 열린 구간 $(2, \infty)$ 에서 $f'(x) < 0$ 이다.

함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = (x+1)f(x) - \int_{-1}^x f(t) dt$$

라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
 [4점]

—<보 기>—

ㄱ. $g'(-1) = 0$
 ㄴ. 함수 $g(x)$ 는 $x = 2$ 에서 극댓값을 갖는다.
 ㄷ. $0 < k < g(2)$ 인 실수 k 에 대하여 방정식
 $g(x) = k$ 는 서로 다른 세 개의 실근을 갖는다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. $a_1 = 1$ 인 수열 $\{a_n\}$ 은 집합

$$A = \{n \mid n = 2^k, k \text{는 음이 아닌 정수}\}$$

와 상수 d 에 대하여 다음을 만족시킨다.

- (가) $n \in A$ 이면 $a_{2n} = 2a_n$ 이다.
 (나) $n \notin A$ 이면 $a_{n+1} = a_n + d$ 이다.

$\sum_{k=1}^{32} a_k = 218$ 일 때, a_{60} 의 값은? [4점]

- ① 44 ② 48 ③ 52
 ④ 56 ⑤ 60

단답형

22. ${}_4P_3$ 의 값을 구하여라. [3점]

23. 함수 $f(x) = \int_{-1}^x (t^2 - 2t)dt$ 에 대하여,

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+3h) - f(-1)}{h}$ 의 값을 구하여라. [3점]

24. 곡선 $y=x^3+10$ 에 접하는 직선이 점 $(0, -6)$ 를 지날 때, 이 직선의 방정식을 $y=mx+n$ 이라 하자. 이때 $m-n$ 의 값을 구하여라. [3점]

25. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow X$ 의 개수를 구하여라. [3점]

- (가) $f(1) < f(3) < f(5) < f(6)$
 (나) $f(4) \leq f(2)$

26. 1이 아닌 양수 a, b 와 실수 x, y 에 대하여

$$a^2b^3 = 1,$$

$$b \times a^x = a^4 \times b^y$$

- 가 성립한다. $3x+2y$ 의 값을 구하여라. [4점]

27. 첫째항이 26이고 공차가 -4 인 등차수열 $\{a_n\}$ 과
 첫째항이 -6 이고 공차가 d 인 등차수열 $\{b_n\}$ 에 대하여

$$a_m b_m > 0$$

이 되게 하는 자연수 m 의 개수가 2가 되게 하는
 모든 실수 d 값의 범위는 $p \leq d < q$ 또는 $r < d \leq s$ 이다.
 $20pr$ 의 값을 구하여라. (단, $p < q < r < s$ 이다.) [4점]

28. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e 의
 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수를 구하여라. [4점]

(가) $a+b+c+d+e=12$

(나) $a+b+c$ 는 $d+e$ 의 배수이다.

29. 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 방정식 $f(x) = \frac{1}{2}x$ 은 서로 다른

두 실근 $0, \alpha$ 를 갖고, 방정식 $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ 은 서로 다른
두 실근 β, γ 를 갖는다. $f(\alpha) = f(\beta)$ 일 때, $f(2\gamma)$ 의 값은
 a 또는 b 이다. $a+b$ 의 값을 구하여라. (단, $0 < \alpha$ 이고
 $\beta < \gamma$ 이다.) [4점]

30. 두 양수 a, k 에 대하여 $f(x) = kx^2(x-2a)^2$ 이고,
두 함수 $g(x)$ 와 $h(x)$ 가 각각

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq a \text{ 또는 } x \geq 2a) \\ -f'(x) & (a < x < 2a) \end{cases},$$

$$h(x) = \int_a^x g(t)dt$$

이다. 방정식 $f(x) = h(x)$ 의 모든 근을 작은 수부터
크기순으로 모두 나열한 것을 α, β, γ 라 할 때,

$$\gamma - \alpha = 2 + 2\sqrt{2},$$

$$f(\beta) = 4$$

가 성립한다. $f(6)$ 의 값을 구하여라. [4점]

[나승민/한성은 모의고사]
6월(나형) 연습(1/2) 정답표

| 문항 | 정답 | 문항 | 정답 | 문항 | 정답 | 문항 | 정답 | 문항 | 정답 |
|----|----|----|----|----|-----|----|-----|----|-----|
| 01 | ㉔ | 02 | ㉕ | 03 | ㉔ | 04 | ㉔ | 05 | ㉑ |
| 06 | ㉑ | 07 | ㉕ | 08 | ㉓ | 09 | ㉔ | 10 | ㉒ |
| 11 | ㉑ | 12 | ㉔ | 13 | ㉑ | 14 | ㉒ | 15 | ㉓ |
| 16 | ㉓ | 17 | ㉕ | 18 | ㉓ | 19 | ㉒ | 20 | ㉕ |
| 21 | ㉓ | 22 | 24 | 23 | 9 | 24 | 18 | 25 | 315 |
| 26 | 14 | 27 | 16 | 28 | 205 | 29 | 102 | 30 | 72 |

COMMENT 16

사인법칙에서 $a = 12$ 이다. 삼각형의 넓이에서 $\frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times (12 + b + c) = \frac{1}{2} bc \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이고,

코사인법칙에서 $144 = b^2 + c^2 - bc$ 이다. 연립하여 풀면 $b + c = 18$ 이다.

COMMENT 17

기역 : 준 식에 $n = 1$ 을 대입하면, $a_1^3 = 2a_1^2$ 이고 $a_n > 0$ 이므로 $a_1 = 2$ 이다.

니은 : 준 식의 n 자리에 $n + 1$ 을 대입하면 $\sum_{k=1}^{n+1} a_k^3 = 2 \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k \right)^2$ 이다.

여기서 준 식을 빼면, $a_{n+1}^3 = 2 \left(\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k \right)^2 - \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 \right) = 2a_{n+1} \left(a_{n+1} + 2 \sum_{k=1}^n a_k \right)$ 이다.

디귤 : 니은의 식과 니은의 식의 n 자리에 $n - 1$ 을 대입한 것을 빼면 등차수열 뜬다.

COMMENT 20

$g(x) = (x+1)f(x) - \int_{-1}^x f(t)dt$ 에서 $g(-1) = 0$ 이고 $g'(x) = (x+1)f'(x)$ 이다.

$g'(x)$ 는 $x < -1$ 일 때 음수, $-1 < x < 2$ 일 때 양수, $2 < x$ 일 때 음수이다.

$g(x)$ 는 다항함수이다. 삼차함수처럼 생겼지만, 삼차라는 보장은 없다.

COMMENT 21

(가)에 의해 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_4 = 4, a_8 = 8, a_{16} = 16, a_{32} = 32$ 이다.

(나)에 의해 $a_3 = 4 - d,$

$$a_7 = 8 - d, a_6 = 8 - 2d, a_5 = 8 - 3d,$$

$$a_{15} = 16 - d, a_{14} = 16 - 2d, \dots, a_9 = 16 - 7d,$$

$$a_{31} = 32 - d, a_{30} = 32 - 2d, \dots, a_{17} = 32 - 15d$$

이다. $\sum_{k=1}^{32} a_k$ 는, 좀 노가다인데,

$$\{1 + 2 + 4 + 2 + 8 + 4 + 16 + 8 + 32 + 16\} - \{1 + (1 + 2 + 3) + (1 + 2 + \dots + 7) + (1 + 2 + \dots + 15)\}d$$

이므로 $683 - 155d$ 이다. $d = 3$ 이고 $a_{64} = 64, a_{60} = 64 - 4d = 52$ 이다.

COMMENT 27

조건 ' $b_5 \leq 0$ 이고 $b_6 > 0$ ' 또는 ' $b_9 < 0$ 이고 $b_{10} \geq 0$ '를 만족시켜야 한다.

풀면 $\frac{2}{3} \leq d < \frac{3}{4}$ 또는 $\frac{6}{5} < d \leq \frac{3}{2}$ 이다.

COMMENT 28

$d + e$ 는 12의 약수이다.

$$\text{Case1) } a + b + c = 10, d + e = 2 \Rightarrow {}_3H_7 \times {}_2H_0 = 36$$

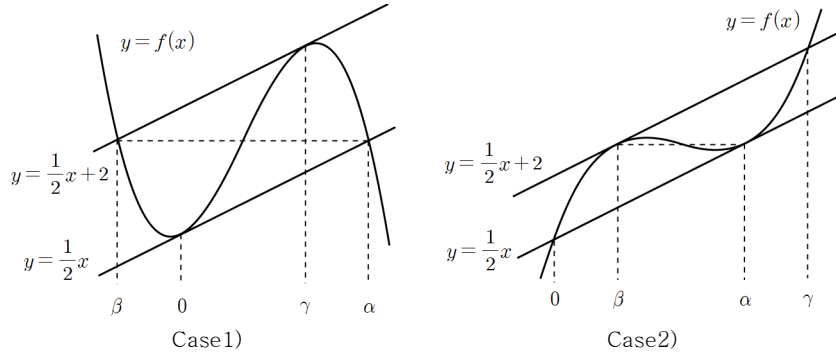
$$\text{Case2) } a + b + c = 9, d + e = 3 \Rightarrow {}_3H_6 \times {}_2H_1 = 56$$

$$\text{Case3) } a + b + c = 8, d + e = 4 \Rightarrow {}_3H_5 \times {}_2H_2 = 63$$

$$\text{Case4) } a + b + c = 6, d + e = 6 \Rightarrow {}_3H_3 \times {}_2H_4 = 50$$

COMMENT 29

다음과 같은 두 가지 형태가 가능하다.



두 경우 모두 곡선의 두 접선의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 것을 चेरी해보면 $\alpha - \beta = 4$ 임을 알 수 있다.

Case1) 비율관계를 때리면 $\beta = -\frac{1}{3}\alpha$, $\gamma = \frac{2}{3}\alpha$ 이다. $\alpha - \beta = \frac{4}{3}\alpha = 4$ 이므로 $\alpha = 3$ 이다.

$$f(x) = kx^2(x-3) + \frac{1}{2}x \text{ 이고 } f(\beta) = f(-1) = -4k - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ 이므로 } k = -\frac{1}{2} \text{ 이다. } f(2\gamma) = -6 \text{ 이다.}$$

Case2) 비율관계를 때리면 $\beta = \frac{1}{3}\alpha$, $\gamma = \frac{4}{3}\alpha$ 이다. $\alpha - \beta = \frac{2}{3}\alpha = 4$ 이므로 $\alpha = 6$ 이다.

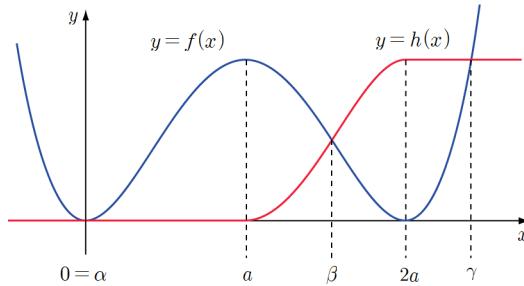
$$f(x) = kx(x-6)^2 + \frac{1}{2}x \text{ 이고 } f(\beta) = f(2) = 32k + 1 = 3 \text{ 이므로 } k = \frac{1}{16} \text{ 이다. } f(2\gamma) = 108 \text{ 이다.}$$

※ Case1)을 상정하고 만들다가 Case2)는 실수로 튀어나왔다.

※ 함수 $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x$ 로 풀면 더 편하지만, 출제의도와 어긋나므로 비밀.

COMMENT 30

$h(a) = 0$ 이고 $h'(x) = g(x)$ 이다. 이를 이용하여 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = h(x)$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



$\alpha = 0$ 이고 비율관계에 의해 $\gamma = a + \sqrt{2}a$ 이므로 $a = 2$ 이다.

$$f(\beta) = \frac{1}{2}f(a) \text{ 이므로 } f(a) = ka^4 = 8 \text{ 에서 } k = \frac{1}{2} \text{ 이다.}$$

※ 비율관계에 대하여 : 나도 이걸 외우고 있지는 않다.

$$\text{함수 } P(x) = x^2(x+a)(x-a) \text{ 가 } \pm \frac{1}{\sqrt{2}}a \text{ 에서 극값을 가지는 것을 확인한다.}$$

※ β 값에 대하여 : 못 구한다.