

[권구승/한성은 모의고사]

| 6월 모의고사(가형) 연습 (2/2) |

| 권구승 (서울대)

이강학원(대치, 분당), 이투스앤써.

통제할 수 없는 외부 환경엔 신경을 끄고 할 수 있는 것에 집중.
기출과 연계교재는 당연히 다 풀었죠? 과목 간 밸런스 잘 챙기기!

| 한성은 (POSTECH 수학과)

이투스앤써, 일산 종로, 일산 클라비스, 5A ACADEMY

열심히 생각하고 하나하나 스스로 납득하기.
문제 너무 많이 풀지 마시고 귀하게 푸세요.

hansungeun.com

- 저자소개, 학습자료, 교재판매

| CCL

- 허락 없이 문제를 쓰실 수 있지만, 출처를 반드시 표시해 주세요.
- 자신이 저작자라는 주장을 하지 말아 주세요.

수학 영역(가형)

5지선다형

1. ${}_4P_3$ 의 값은? [2점]

- ① 3 ② 4 ③ 6
④ 12 ⑤ 24

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) + \ln(1-x)}{x}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

3. $f(x) = \sin(2x-2)$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [2점]

- ① -2 ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 4

4. 두 사건 A, B 에 대하여

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}, \quad P(A \cap B^c) = \frac{1}{3}$$

일 때, $P(B|A)$ 의 값은? (단, A^c 는 A 의 여사건이다.)

[3점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

2

수학 영역(가형)

5. $\log_3 2 = a$, $\log_2 5 = b$ 일 때, $\log_2 60$ 을 a , b 로 옳게 나타낸 것은? [3점]

- ① $a+b+2$ ② $a+b+\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{a}+b+2$
④ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+2$ ⑤ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}$

6. 부등식 $3^{2x} - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 \leq 0$ 를 만족시키는 모든 정수 x 의 값의 합은? [3점]

- ① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

7. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\frac{6a_1}{a_2 + a_3} = 1$$

일 때, $\frac{a_4}{a_2} + \frac{a_8}{a_4}$ 의 값은? [3점]

- ① 20 ② 18 ③ 16
④ 14 ⑤ 12

8. $\tan\theta < 0$ 이고 $\sin\theta = \frac{3}{5}$ 일 때, $\tan\theta + \frac{1}{\cos\theta}$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{1}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{3}{2}$
 ④ -2 ⑤ $-\frac{5}{2}$

9. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$b_n + \frac{n}{n+1} < a_n < b_n + \frac{n+1}{n}$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

10. 어느 도시 시민의 2%가 신종 바이러스 모르나19에 감염되어 있다. 모르나19에 대한 진단검사는 감염자의 98%를 양성으로 진단하고, 비감염자의 4%를 양성으로 진단한다. 이 도시의 시민 중 임의로 1명을 선택하여 진단검사를 돌리는 시행을 한다. 진단결과 양성이 났을 때, 이 시민이 모르나19에 감염되어 있을 확률은? [3점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{5}{24}$ ③ $\frac{1}{4}$
 ④ $\frac{7}{24}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

4

수학 영역(가형)

11. 매개변수 t 로 나타내어진 곡선

$$x = t^2 - 1, \quad y = t^3 - 2t$$

에서 $t = a$ 일 때 $\frac{dy}{dx} = \frac{5}{2}$ 이다. 양수 a 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

12. 두 실수 a, c 와 양수 b 에 대하여 함수

$$f(x) = a \cos bx + c$$

의 최솟값은 0, 최댓값은 4이다. 방정식 $f(x) = 0$ 의 근 중 양수인 근 중 가장 작은 것이 π , 두 번째로 작은 것이 2π 일 때, abc 의 값은? [3점]

- ① -8 ② -4 ③ -2
④ 4 ⑤ 8

13. 반지름의 길이가 5인 원에 내접하는 삼각형 ABC의 넓이가 12이고 $\overline{BC}=8$ 이다. $\overline{AB}+\overline{AC}$ 의 값은? [3점]

- ① 12 ② $4\sqrt{10}$ ③ $4\sqrt{11}$
 ④ $8\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{13}$

14. 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3의 숫자가 하나씩 적혀 있는 9개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 한 개의 공을 임의로 꺼내어 공에 적힌 수를 확인한 후 다시 넣지 않는 시행을 네 번 반복할 때 k 번째 꺼낸 공에 적힌 수를 a_k 라 하자. 다음은 $a_1a_2a_3a_4$ 가 12의 배수일 때, $a_1a_2a_3$ 가 12의 배수가 아닐 확률을 구하는 과정이다.

$a_1a_2a_3a_4$ 가 12의 배수인 사건을 A , $a_1a_2a_3$ 가 12의 배수인 사건을 B 라 하자.

(i) 사건 A 는 네 수 a_1, a_2, a_3, a_4 의 조합이 $\{1, 2, 2, 3\}, \{2, 2, 2, 3\}, \{2, 2, 3, 3\}$ 인 경우이므로 $P(A) = \boxed{\text{(가)}}$ 이다.

(ii) 사건 B 는 세 수 a_1, a_2, a_3 의 조합이 $\{2, 2, 3\}$ 인 경우이므로 $P(B) = \frac{1}{14}$ 이다.

구하는 확률은 $P(B^c|A)$ 이다.

$$P(B^c|A) = 1 - P(B|A) = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

이고 $P(A \cap B) = P(B)$ 이므로

$$P(B^c|A) = \boxed{\text{(나)}}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 p, q 라 할 때, pq 의 값은? [4점]

- ① $\frac{4}{63}$ ② $\frac{2}{21}$ ③ $\frac{8}{63}$
 ④ $\frac{10}{63}$ ⑤ $\frac{4}{21}$

15. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을

S_n 이라 할 때, $\sum_{k=m}^{m+4} S_k$ 의 값은 $m=10$, $m=11$ 일 때

동일한 최댓값을 갖는다. $\sum_{k=m}^{m+4} |S_k|$ 의 값이 최소가

되도록 하는 자연수 m 의 값은? [4점]

- ① 21 ② 22 ③ 23
 ④ 24 ⑤ 25

16. 집합 $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 모든 일대일 대응 $f: X \rightarrow X$ 중 임의로 하나를 선택할 때, 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

집합

$\{x | f(x) < f(0), x \text{는 집합 } X \text{의 홀수인 원소}\}$
 의 원소의 개수는 2이다.

- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$
 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

17. 두 함수

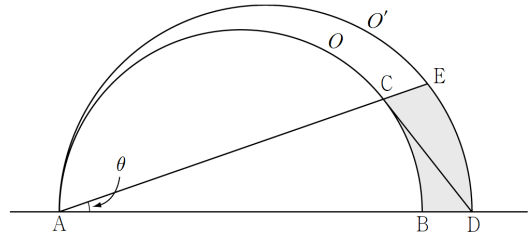
$$f(x) = |x|(2-x)e^x, \quad g(x) = -x$$

에 대하여 방정식 $f(x) = g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수는? [4점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

18. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 O 가 있다. 반원 위의 점 C 에서 곡선 O 에 접하는 직선과 선분 AB의 연장선이 만나는 점을 D , 선분 AD를 지름으로 하는 반원을 O' . 선분 AC의 연장선과 반원 O' 이 만나는 점을 E 라 하자. $\angle CAB = \theta$ 라 할 때, 두 곡선 O, O' 및 두 선분 BD, CE로 둘러싸인 도형 BDEC의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$ 의 값은?

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
 ④ 2 ⑤ 4

19. 1, 2, 3, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 있다. 이 카드 중 한 장을 꺼내어 확인하고 다시 넣는 시행을 2번 반복할 때, 2장의 카드에 적힌 숫자의 평균이 3일 확률은? [4점]

- ① $\frac{3}{25}$ ② $\frac{4}{25}$ ③ $\frac{1}{5}$
 ④ $\frac{6}{25}$ ⑤ $\frac{7}{25}$

20. $x > 0$ 에서 정의된 함수 $f(x) = |e^x \cos x|$ 에 대하여,

$$f(x) = e^x$$

의 근 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n 번째 수를 a_n 이라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

—<보 기>—

ㄱ. $f'(a_n + \frac{\pi}{4}) = 0$

ㄴ. 점 $(a_n, f(a_n))$ 은 곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점이다.

ㄷ. $\frac{\pi}{2} f'(c) + e^{a_n} = 0$ 를 만족시키는 실수 c 가

구간 $(a_n + \frac{\pi}{4}, a_n + \frac{\pi}{2})$ 에 존재한다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 함수 $f(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - x$ 에 대하여
 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선이
 곡선 $y = f(x)$ 와 세 점에서 만날 때,
 만나는 세 점 중에서 x 좌표가 가장 작은 점의
 x 좌표를 $a(t)$, x 좌표가 가장 큰 점의 x 좌표를
 $b(t)$ 라 하자. $a'(1) - 5b'(1)$ 의 값은? [4점]

- ① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$
 ④ 2 ⑤ $\frac{7}{3}$

단답형

22. $\left(x + \frac{2}{x}\right)^6$ 의 전개식에서 x^2 의 계수를 구하여라. [3점]

23. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = a_n + (2n - 1)$$

을 만족시킨다. $a_4 = 6$ 일 때, $a_3 + a_6$ 의 값을 구하여라.
 [3점]

24. A, B, C를 포함한 6명이 원탁에 같은 간격으로 둘러앉으려고 한다. A와 B가 서로 이웃하고, B와 C가 서로 이웃하도록 앉는 경우의 수를 구하여라. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

25. 등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_4 = 32, \quad 3a_2 - a_1 = \sum_{n=3}^{\infty} a_n$$

를 만족시킬 때, a_6 의 값을 구하여라. [3점]

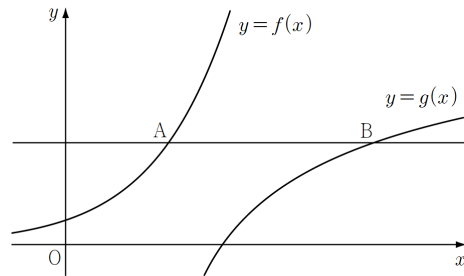
26. 그림과 같이 x 축에 평행한 직선이 두 함수

$$f(x) = 2^x - 1, \quad g(x) = \log_2(x - 2)$$

와 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 두 점 A, B는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $\overline{AB} = 4$
- (나) 점 A의 x 좌표는 점 B의 y 좌표와 같다.

점 B의 x 좌표를 구하여라. [4점]



27. 자연수 n 에 대하여 원점과 점 $P_n(1, n)$ 을 이은 선분이 x 축의 양의 방향과 이루는 각을 θ_n 이라 하자.

$$\theta_3 - \theta_2 = \theta_p - \theta_q$$

가 되도록 하는 p, q 에 대하여 $p+q$ 의 최댓값을 구하여라. (단, p, q 는 자연수이다.) [4점]

28. 다음 조건을 만족시키는 10 이하의 자연수 a, b, c, d, e 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수를 구하여라. [4점]

- (가) $a \leq b \leq c \leq d \leq e$
 (나) $2(b-a) = e-d$

29. 수열 $\{a_n\}$ 은 a_1 이 자연수이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - d & (a_n \geq 0) \\ a_n + d & (a_n < 0) \end{cases} \quad (d \text{는 자연수})$$

이다. $a_n < 0$ 이 되도록 하는 n 의 최솟값을 m 이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$ 과 m 은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_2 + a_{m-2} = 28$
 (나) $\sum_{k=1}^{m-1} a_k = 126$

$\sum_{k=1}^n a_{2k} \geq 50$ 을 만족시키는 모든 자연수 p 의 값의 합을 구하여라. (단, m 은 3 이상의 자연수이다.) [4점]

30. 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

와 함수

$$g(x) = kxe^{-x+1} \quad (k > 0)$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(f(x)) - 2}{x - 2} = 4$
 (나) 함수 $|(f \circ g)(x) - g(x)|$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$f(k+2)$ 의 최댓값을 구하여라. [4점]

[권구승/한성은 모의고사]
6월(가형) 연습(2/2) 정답표

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	⑤	02	③	03	④	04	②	05	③
06	①	07	①	08	④	09	①	10	⑤
11	②	12	①	13	②	14	④	15	③
16	②	17	③	18	⑤	19	④	20	⑤
21	④	22	60	23	23	24	12	25	8
26	6	27	49	28	325	29	52	30	12

COMMENT 14

$$p = \frac{29}{126}, \quad q = \frac{20}{29}$$

COMMENT 15

S_n 은 $n=12, n=13$ 일 때 최댓값을 가진다. 대칭축이 $x=12.5$ 이므로 $S_n = ax(x-25)$ 이다.

S_{25} 주변을 적당히 살펴보면, $\sum_{k=m}^{m+4} |S_n|$ 의 값은 $m=23$ 일 때 최소이다.

COMMENT 16

사건의 경우의 수는 다음과 같다.

$$\text{Case1) } f(0)=2 : {}_3C_2 \times 2! \times 4! = 144$$

$$\text{Case2) } f(0)=3 : {}_3C_2 \times {}_3C_1 \times 3! \times 3! = 324$$

$$\text{Case3) } f(0)=4 : {}_3C_2 \times {}_3C_2 \times 4! \times 2! = 432$$

$$\text{Case4) } f(0)=5 : {}_3C_2 \times 5! = 360$$

구하는 확률은 $\frac{1260}{7!} = \frac{1}{4}$ 이다.

별해 : 네 수 $f(0), f(1), f(3), f(5)$ 중 $f(0)$ 이 두 번째 큰 수가 되어야 한다.

COMMENT 18

원 O 의 중심을 O , 원 O' 의 중심을 O' 이라 하자. $\overline{OD} = \frac{1}{\cos 2\theta}$ 이므로 원 O' 의 지름은 $1 + \frac{1}{\cos 2\theta}$ 이다.

원 O 의 반지름 1을 r , 원 O' 의 반지름 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cos 2\theta}$ 를 R 이라 하자. 도형 ADE의 넓이는

삼각형 $AO'E$ 의 넓이와 부채꼴 $O'ED$ 의 넓이의 합이므로 $\frac{1}{2}R^2 \sin 2\theta + \frac{1}{2}R^2(2\theta) = R^2\left(\frac{1}{2} \sin 2\theta + \theta\right)$ 이다.

마찬가지로 도형 ABC의 넓이는 $r^2\left(\frac{1}{2} \sin 2\theta + \theta\right)$ 이다. $S(\theta)$ 는 이 두 값의 차이므로 $S(\theta) = (R^2 - r^2)\left(\frac{1}{2} \sin 2\theta + \theta\right)$ 이다.

COMMENT 19

모두 다른 것으로 봐야 한다. 전체 경우의 수는 5×5 이고,

숫자의 평균이 3인 경우의 수 : $(2, 4), (4, 2), (3_a, 3_a), (3_b, 3_b), (3_a, 3_b), (3_b, 3_a)$ 의 6가지

COMMENT 20

$e^x = |e^x \cos x| \Leftrightarrow |\cos x| = 1$ 에서 $a_n = n\pi$ 이다.

$$\neg. f'(x) = \begin{cases} e^x \cos x - e^x \sin x & (\cos x \geq 0) \\ -e^x \cos x + e^x \sin x & (\cos x < 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\neg. f''(x) = \begin{cases} -e^x \sin x & (\cos x \geq 0) \\ e^x \sin x & (\cos x < 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\neg. f(a_n) = e^{a_n}, f\left(a_n + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{이다. } \frac{\pi}{2} f'(c) + e^{a_n} = 0 \text{는 } f'(c) = \frac{f\left(a_n + \frac{\pi}{2}\right) - f(a_n)}{\left(a_n + \frac{\pi}{2}\right) - a_n} \text{이므로 평균값 정리이다.}$$

COMMENT 21

$a(t)$, $b(t)$ 가 방정식 $f(x) = f'(t)(x-t) + f(t)$ 의 근이므로

$$f(a(t)) = f'(t)(a(t)-t) + f(t) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$f(b(t)) = f'(t)(b(t)-t) + f(t) \quad \cdots \textcircled{2}$$

다음 방정식에서 $a(1)=0$, $b(1)=3$ 이다.

$$f(X) = f'(1)(X-1) + f(1) \Leftrightarrow X^4 - 5X^3 + 7X^2 - X = 2X$$

식 ①을 t 에 대하여 미분하자.

$$a'(t)f'(a(t)) = f''(t)(a(t)-t) + f'(t)(a'(t)-1) + f'(t) \Rightarrow a'(t) = \frac{f''(t)(a(t)-t)}{f'(a(t))-f'(t)}$$

정리하면 $a'(1) = \frac{f''(1)(a(1)-1)}{f'(a(1))-f'(1)} = \frac{f''(1)(0-1)}{f'(0)-f'(1)} = -\frac{4}{3}$ 이다. 같은 방법으로 $b'(1) = \frac{f''(1)(b(1)-1)}{f'(b(1))-f'(1)} = \frac{f''(1)(3-1)}{f'(3)-f'(1)} = -\frac{2}{3}$ 이다.

COMMENT 27

$\tan \theta_n = n$ 이다. $\tan(\theta_3 - \theta_2) = \tan(\theta_p - \theta_q)$ 은 $\frac{3-2}{1+3 \times 2} = \frac{p-q}{1+pq}$ 이므로

$$pq - 7p + 7q + 1 = 0 \Leftrightarrow (p+7)(q-7) = -50$$

이다. $p+7$ 과 $q-7$ 은 정수이므로 가능한 (p, q) 순서쌍은 $(43, 6)$, $(18, 5)$, $(3, 2)$ 이다.

COMMENT 28

$b-a$ 와 $e-d$ 에 대하여 분류하자. b 와 d 가 결정되면 a 와 e 는 하나로 결정된다.

Case1) $b-a=0$, $e-d=0$ 일 때, $1 \leq b \leq c \leq d \leq 10$ 에서 ${}_{10}H_3 = 220$ 이다.

Case2) $b-a=1$, $e-d=2$ 일 때, $2 \leq b \leq c \leq d \leq 8$ 에서 ${}_{7}H_3 = 84$ 이다.

Case3) $b-a=2$, $e-d=4$ 일 때, $3 \leq b \leq c \leq d \leq 6$ 에서 ${}_{4}H_3 = 20$ 이다.

Case4) $b-a=3$, $e-d=6$ 일 때, $4 \leq b \leq c \leq d \leq 4$ 에서 ${}_{1}H_3 = 1$ 이다.

COMMENT 29

잘 살펴보면 a_1 부터 a_{m-1} 까지는 등차수열을 이룬다.

(가)에서 $m-1$ 개의 수 a_1, a_2, \dots, a_{m-1} 의 평균은 14이다.

$$\sum_{k=1}^{m-1} a_k = 14 \times (m-1) \text{이므로 } m=10 \text{이다.}$$

$a_5 = 14$, $a_9 > 0$, $a_{10} \leq 0$ 을 만족하는 자연수 d 는 3이다. $\{a_n\}$ 은

$$26, 23, 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2, -1, 2, -1, 2, -1, 2, \dots$$

이고 $\sum_{k=1}^p a_{2k} \geq 50$ 을 만족시키는 자연수 p 는 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10이다.

COMMENT 30

(가)에서 $f(2) = 2$, $f'(2) = 2$ 이다.

(나)에서 $h(x) = f(g(x)) - g(x)$ 라 하자.

$h(0) = 0$ 이므로 $|h(x)|$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하려면 $h'(0) = 0$ 이다.

$h'(x) = f'(g(x))g'(x) - g'(x)$ 에서 $h'(0) = g'(0)\{f'(0) - 1\}$ 에서 $f'(0) = 1$ 이다.

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x \text{이다.}$$

$f(x) = x$ 의 근이 0과 2이므로 $h(x) = 0$ 의 근은 $g(x) = 0$ 또는 $g(x) = 2$ 인 x 값들이다.

$g(x)$ 의 최댓값 k 가 2를 넘으면 안 되는 각, k 의 최댓값은 2이다.