2021학년도 인수·제헌 6월 모의평가 해설지 [나형]

1	③	2	①	3	②	4	④	5	②
6	⑤	7	③	8	①	9	④	10	①
11	⑤	12	③	13	①	14	④	15	④
16	⑤	17	①	18	②	19	⑤	20	②
21	⑤	22	15	23	16	24	128	25	177
26	20	27	6	28	9	29	10	30	7

1.
$\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$ 이다.

2.
$\tan\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

3.
$\lim_{x\to 1}(x^2+3x+2) = 6$ 이다.

4.
a와 $a+4$의 등차중항이 $\frac{9}{2}$ 이므로
$2\times\frac{9}{2} = a+a+4$ 이다.
즉, $9 = 2a+4$ 이므로 $a = \frac{5}{2}$ 이다.

5.
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 이므로 $2\cos^2 x = 3\sin x$ 에서
$2(1-\sin^2 x) = 3\sin x$ 이다. 식을 정리하면
$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$ 에서
$(2\sin x - 1)(\sin x + 2) = 0$ 이고,
$-1 \le \sin x \le 1$ 이므로 $\sin x = \frac{1}{2}$ 이다.
$0 \le x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $\sin x = \frac{1}{2}$ 의 모든 해는
$x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$ 이므로 주어진 방정식의 모든 해의 합은 π 이다.

6.
$\mathrm{P}(A\cup B^C) = 1 - \mathrm{P}(A^C \cap B) = \frac{5}{6}$ 에서
$\mathrm{P}(A^C\cap B) = \frac{1}{6}$ 이다. 따라서
$\mathrm{P}(A\cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(A^C\cap B) = \frac{5}{12}$ 이다.

7.
$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 4-} f(x) = 2$ 이므로
$\lim_{x\to 0} f(x) + \lim_{x\to 4-} f(x) = 0 + 2 = 2$ 이다.

8.
이 조사에 참여한 학생 중에서 임의로 선택한 1 명이 I 교재를 선택한 학생인 사건을 A, 이 조사에 참여한 학생 중에서 임의로 선택한 1 명이 여학생인 사건을 B 라 하면, 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$ 이다.
이때 $\mathrm{P}(A) = \frac{18}{35}$, $\mathrm{P}(A\cap B) = \frac{8}{35}$ 이므로

$$\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\frac{8}{35}}{\frac{18}{35}} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$ 이다.

9.
$f'(x) = 2x+1$ 에서
$f(x) = x^2 + x + C$ (C는 적분상수)이다.
$f(0) = 1$ 이므로 $C = 1$ 이다.
따라서 $f(1) = 3$ 이다.

10.
첫 번째 자리에 올 수 있는 문자는 4 개이고,
두 번째 자리에 올 수 있는 문자는 4 개이고,
세 번째 자리에 올 수 있는 문자는 4 개이다.
마지막 자리의 문자는 첫 번째 자리의 문자와 같으므로 구하는 경우의 수는 $4^3 = 64$ 이다.

11.
$b = 4a$ 이므로 $a^b = b^{\frac{a}{3}}$ 에서 $a^{4a} = (4a)^{\frac{a}{3}}$,
$a^4 = (4a)^{\frac{1}{3}}$ 이므로 $a^{12} = 4a$, $a^{11} = 4$ 이다. 따라서
$a = 2^{\frac{2}{11}}$ 이다. 따라서 $b = 4\times 2^{\frac{2}{11}} = 2^{\frac{24}{11}}$ 이다.

12.
$\int_0^3 |x^2-4|\,dx$
$= \int_0^2 (4-x^2)dx + \int_2^3 (x^2-4)dx$ 이다.
$\int_0^2 (4-x^2)dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{16}{3}$,
$\int_2^3 (x^2-4)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_2^3 = \frac{7}{3}$ 이므로
답은 $\frac{23}{3}$ 이다.

13.
$x_1(t) = t$, $x_2(t) = t^2 - 3t$ 에서
시각 t에서의 점 P의 속도는 $x_1{}'(t) = 1 > 0$ 이고,
시각 t에서의 점 Q의 속도는 $x_2{}'(t) = 2t-3$ 이므로
$x_2{}'(t) < 0$ 인 시각 t에 대하여 두 점 P, Q가 서로 반대방향으로 움직인다. 따라서 두 점 P, Q가 서로 반대방향으로 움직이는 시각 t $(t>0)$의 범위는
$2t-3 < 0$ 에서 $0 < t < \frac{3}{2}$ 이다.

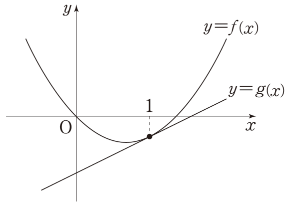
14.
꺼낸 두 공에 적혀 있는 두 숫자의 차가 1 이 되려면 꺼낸 두 공에 적힌 숫자가 1, 2 이거나 2, 3 이어야 한다. 따라서 구하는 확률은
$\frac{{}_4\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1 + {}_3\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_2} = \frac{1}{2}$ 이다.

15.
1) (가)를 구하는 과정
$a_1 \times {}_8\mathrm{C}_0 + (a_1+2)\,{}_8\mathrm{C}_1 + \cdots + (a_1+16)\,{}_8\mathrm{C}_8$
$= a_1 \times ({}_8\mathrm{C}_0 + {}_8\mathrm{C}_1 + \cdots + {}_8\mathrm{C}_8)$
$+ \boxed{(가)} \times ({}_8\mathrm{C}_1 + 2\times{}_8\mathrm{C}_2 + \cdots + 8\times{}_8\mathrm{C}_8)$
처음은 a_1 을 공통인수로 묶고
나머지는 2 를 공통인수로 묶으므로 $p = 2$ 이다.
2) (나)를 구하는 과정
$k\times{}_8\mathrm{C}_k = k\times\frac{8!}{k!(8-k)!} = 8\times\frac{7!}{(k-1)!(8-k)!}$
$= 8\times{}_7\mathrm{C}_{k-1}$ 이다. 따라서 $f(k) = k-1$ 이다.
3) (다)를 구하는 과정
${}_8\mathrm{C}_1 + 2\times{}_8\mathrm{C}_2 + \cdots + 8\times{}_8\mathrm{C}_8$
$= \sum_{k=1}^{8} k\times{}_8\mathrm{C}_k = \sum_{k=1}^{8} 8\times{}_7\mathrm{C}_{k-1}$
$= 8\sum_{k=1}^{8} {}_7\mathrm{C}_{k-1} = 8\sum_{k=0}^{7} {}_7\mathrm{C}_k$
$\sum_{k=0}^{7} {}_7\mathrm{C}_k = 2^7$ 이므로 $q = 8\times 2^7 = 2^{10}$ 이다.
$\therefore \frac{q}{f(p)\times f(9-p)} = \frac{1024}{f(2)f(7)} = \frac{512}{3}$

16.
진수조건과 부등호에 유의하여 부등식의 해를 구하자.
$\log_4\left(\sqrt{3} - 2\cos\frac{x}{2}\right) < \log_4(2+\sqrt{6}) - \frac{1}{4}$,
$\frac{1}{2}\log_2\left(\sqrt{3} - 2\cos\frac{x}{2}\right) < \frac{1}{2}\left\{\log_2(2+\sqrt{6}) - \frac{1}{2}\right\}$ 에서
$\log_2\left(\sqrt{3} - 2\cos\frac{x}{2}\right) < \log_2(2+\sqrt{6}) - \frac{1}{2}$,
$\log_2\left(\sqrt{3} - 2\cos\frac{x}{2}\right) < \log_2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ 이다.
진수조건에 의하여 $\sqrt{3} - 2\cos\frac{x}{2} > 0$,
$\cos\frac{x}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이고,
부등식 $\log_2\left(\sqrt{3} - 2\cos\frac{x}{2}\right) < \log_2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ 을 풀면
$\sqrt{3} - 2\cos\frac{x}{2} < \sqrt{2} + \sqrt{3} \iff \cos\frac{x}{2} > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.
따라서 주어진 부등식은 부등식
$-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos\frac{x}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 해를 구하는 것과 같다.
$0 \le x < 2\pi$ 이므로 $\frac{x}{2} = t$ 라 하면 $0 \le t < \pi$ 이고,
$0 \le t < \pi$ 에서 부등식 $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos t < \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 해는
$\frac{\pi}{6} < t < \frac{3\pi}{4}$ 이다. 따라서 $\frac{\pi}{6} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4}$,
$\frac{\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{2}$ 이다.
$\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{3\pi}{2}$ 이므로 $3\alpha + \beta = \frac{5\pi}{2}$ 이다.

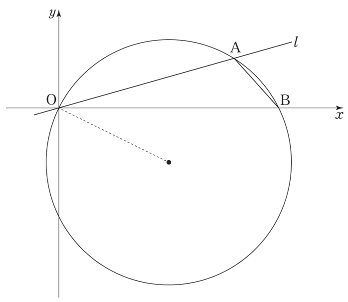
17.
$\frac{a_n}{S_n} = \frac{1}{3}n^2 + c$ 에 $n=1$ 을 대입하면 $\frac{a_1}{S_1} = \frac{1}{3} + c$ 이고,
$S_1 = a_1$ 이므로 $1 = \frac{1}{3} + c \iff c = \frac{2}{3}$ 이다.
2 이상의 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 이 성립하므로
$\sum_{n=2}^{10} \frac{S_{n-1}}{S_n} = \sum_{n=2}^{10} \frac{S_n - a_n}{S_n} = \sum_{n=2}^{10}\left(1 - \frac{a_n}{S_n}\right) = 9 - \sum_{n=2}^{10}\frac{a_n}{S_n}$
이다. $\frac{a_n}{S_n} = \frac{1}{3}n^2 + \frac{2}{3}$ 이므로
$\sum_{n=2}^{10}\frac{a_n}{S_n} = \sum_{n=2}^{10}\left(\frac{1}{3}n^2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{10} n^2 + 6 = 134$ 이다.
따라서 답은 $9 - 134 = -125$ 이다.

18.
$f(x) \geq g(x)$ 이려면 다음과 같이 직선의 방정식 $y=g(x)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$ 에서의 접선의 방정식이어야 한다.



$f'(1)=2+a$이고, $g(3)=1$이므로 직선 $y=g(x)$ 는 두 점 $(1,\ f(1))$, $(3,\ 1)$을 지난다.
$f'(1)=\dfrac{g(3)-g(1)}{3-1}$ (순간변화율=평균변화율)
이므로 $2+a=\dfrac{1-(a+1)}{2}=-\dfrac{a}{2} \Leftrightarrow a=-\dfrac{4}{3}$
두 번째 풀이)
점 $(1,\ f(1))$을 지나는 직선의 기울기를 m이라 하면 $f(1)=a+1$이므로 $g(x)=m(x-1)+a+1$이고 $g(3)=1$이므로 $a=-2m$이다.
모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq g(x)$ 이므로
이를 x와 a로 나타내면
$x^2+ax \geq -\dfrac{a}{2}x+\dfrac{3}{2}a+1$이다.
모든 실수 x에 대하여 $x^2+\dfrac{3}{2}ax-\dfrac{3}{2}a-1 \geq 0$이려면
이차방정식 $x^2+\dfrac{3}{2}ax-\dfrac{3}{2}a-1=0$ 의 판별식이 0보다 작거나 같아야 한다.
$\left(\dfrac{3}{2}a\right)^2+4\left(\dfrac{3}{2}a+1\right) \leq 0$
$\Leftrightarrow\ \dfrac{9}{4}a^2+6a+4 \leq 0$
$\Leftrightarrow\ 9a^2+24a+16 \leq 0$
$\Leftrightarrow\ (3a+4)^2 \leq 0$
따라서 $a=-\dfrac{4}{3}$ 이다.

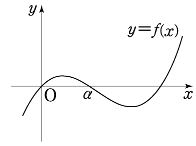
19.
직선 $l: \sqrt{2}x-5y=0$ 의 기울기는 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{5}x$ 에서 $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$ 이다. 따라서 직선 OA가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{5}$ 이다.
이때, $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{9}$ 이다. 삼각형 OAB에 사인법칙을 이용하면 $\dfrac{\overline{AB}}{\sin\theta}=2R$ 이다.
$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{9}$, $\overline{AB}=2\sqrt{6}$ 이므로 $2R=18$, $R=9$ 이다.



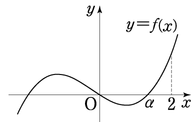
위 그림에서 원의 중심은 제 4사분면에 있고, 중심을 $\left(p,\ -\dfrac{1}{2}p\right)$라 할 수 있다. 이때, $p^2+\left(-\dfrac{1}{2}p\right)^2=9^2$,
$\dfrac{5}{4}p^2=81$, $p^2=\dfrac{324}{5}$ 이다.
$\therefore\ p\times q=-\dfrac{1}{2}p^2=-\dfrac{162}{5}$

20.
4 이하의 모든 자연수 n에 대하여 $|x_{n+1}-x_n| \leq 1$ 이므로 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$ 의 개수는 3^4 이다.
선택한 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$ 에 대하여 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 중 적어도 하나 자연수가 아닌 수가 존재하는 사건을 A라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A^C)$ 이다.
사건 A가 일어나는 경우의 수는
'i) $x_1x_2x_3 \neq 0$이고 $x_4=0$인 경우' 와
'ii) $x_1x_2x_3x_4 \neq 0$이고 $x_5=0$인 경우'
로 나누어 줄 수 있다.
i) $x_1x_2x_3 \neq 0$이고 $x_4=0$인 경우
순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$ 는
$(3,\ 2,\ 1,\ 0,\ x_5)$ 이고 x_5는 -1 또는 0 또는 1이 가능하므로 3가지이다.
ii) $x_1x_2x_3x_4 \neq 0$이고 $x_5=0$인 경우
순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$ 는 $(3,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0)$, $(3,\ 2,\ 2,\ 1,\ 0)$, $(3,\ 2,\ 1,\ 1,\ 0)$ 으로 3가지이다.
따라서 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{6}{3^4}=\dfrac{2}{27}$ 이므로 답은 $\dfrac{25}{27}$ 이다.

21.
ㄱ. $\displaystyle\int_0^{2021} f(x)\,dx=\int_2^{2021} f(x)\,dx$ 에서
$\displaystyle\int_0^{2021} f(x)\,dx-\int_2^{2021} f(x)\,dx=0$
$\Leftrightarrow\ \displaystyle\int_0^{2021} f(x)\,dx-\left(-\int_{2021}^{2} f(x)\,dx\right)=0$
$\Leftrightarrow\ \displaystyle\int_0^{2021} f(x)\,dx+\int_{2021}^{2} f(x)\,dx=0$
$\Leftrightarrow\ \displaystyle\int_0^{2} f(x)\,dx=0$이다. (참)
ㄴ. 열린 구간 $(0,\ 2)$ 에서 방정식 $f(x)=0$ 의 실근이 존재하지 않는다고 가정하면, $0<x<2$ 일 때, $f(x)>0$ 이거나 $f(x)<0$ 이다.
구간 $(0,\ 2)$ 에서 $f(x)>0$ 이면 $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx>0$ 이고,
구간 $(0,\ 2)$ 에서 $f(x)<0$ 이면 $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx<0$ 이다.
따라서 $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx=0$ 과 모순이므로
방정식 $f(x)=0$ 은 열린 구간 $(0,\ 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. (참)
[별해]
함수 $g(x)$ 를 $g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ 라 하자.
$g(0)=0$ 이고, $g(2)=0$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $g'(c)=0$ 인 c가 0과 2 사이에 적어도 하나 존재한다. 이때 $g'(x)=f(x)$ 이므로 방정식 $f(x)=0$ 은 열린 구간 $(0,\ 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. (참)
ㄷ. $f(0)=0$ 이고, 방정식 $f(x)=0$ 이 열린 구간 $(0,\ 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 가질 때, 가능한 함수 $f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



<그림 1>



<그림 2>

<그림 2>에선 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 가 접할 수 없으므로 곡선 $y=f(x)$ 가 직선 $y=x$ 에 접하기 위해선 곡선 $y=f(x)$ 가 <그림 1>과 같아야한다.
이때, 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 가 만나는 점 중 원점이 아닌 점에서의 접선의 기울기는 1이 될 수 없다. 따라서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 접점은 $(0,\ 0)$ 이고, $f'(0)=1$ 이다.
함수 $f(x)$ 를 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 라 하자.
$f'(x)=3x^2+2ax+b$ 에서 $f'(0)=1$ 이므로 $b=1$ 이다.
한편, $\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt=\int_0^2 \left(t^3+at^2+t\right)dt=0$ 이므로
$\left[\dfrac{1}{4}t^4+\dfrac{a}{3}t^3+\dfrac{1}{2}t^2\right]_0^2=4+\dfrac{8}{3}a+2=0$ 이다.
따라서 $a=-\dfrac{9}{4}$ 이다.
즉, 함수 $f(x)$ 는 $f(x)=x^3-\dfrac{9}{4}x^2+x$ 이므로 $f(2)=8-9+2=1$ 이다. (참)
[참고] ㄷ. 논리적 증명
<그림 1>에서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 가 만나는 원점이 아닌 점을 P라 하자.
0이 아닌 어떤 실수 k에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 에 접하는 직선 $y=x+k$는 점 P를 지나지 않으므로 점 P에서의 접선의 기울기는 1이 아니다.
따라서 점 P는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 접점이 될 수 없으므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 접점은 점 $(0,\ 0)$ 이다.

22.
${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$ 이다.

23.
$f'(x)=-6x^2+22x$ 이므로 $f'(1)=16$ 이다.

24.
등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 $a_n=a\times r^{n-1}$ 이라 하자.
$a_5=(a_1)^5 \Leftrightarrow a\times r^4=a^5$ 에서
$a>0$, $r>0$ 이므로 $a=r$ 이고, $a_n=r^n$ 이다.
이때 $a_2\times a_4=(a_3)^2=64$ 이므로 $a_3=8$ 이다.
즉, $a_3=r^3=8$ 에서 $r=2$ 이므로 $a_n=2^n$ 이다.
따라서 $a_7=2^7=128$ 이다.

25.
$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(2a_k-k)=35$ 이므로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}2a_k=55+35=90$,
$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k=45$ 이다. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=3$ 이므로
$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}b_k=42$ 이다. 따라서 답은 177 이다.

26.
11개의 구슬을 일렬로 나열할 때, 좌우가 대칭이 되도록 구슬을 나열하면 ○가 적힌 구슬의 개수가

$3\,(=$홀수$)$이므로 ○가 적힌 구슬이 가운데에 있다. 가운데에 놓인 ○가 적힌 구슬의 왼쪽 5개의 구슬을 나열하면, 좌우가 대칭이어야 하므로 오른쪽 5개의 구슬은 나열 순서가 정해진다. 곧, 구하는 경우의 수는 검은 구슬 3개, 흰 구슬 1개, ○가 적힌 구슬 1개를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.
그러므로 구하는 경우의 수는 $\frac{5!}{3!}=5\times4=20$이다.

27.
함수 $y=\frac{x}{f(x)}+1$이 $x=3$에서 불연속이므로
$f(3)=0$, 함수 $y=\frac{x+3}{f(x-1)}$이 $x=3$에서 불연속이므로 $f(2)=0$이다.
따라서 $f(x)=(x-2)(x-3)$이다.
$\therefore\ f(0)=6$

28.
함수 $f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로
$f(0)=0$, $b=-2^{-a}$이다.
곡선 $y=g(x)$와 직선 $x=10$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 함수 $f(x)$의 역함수 그래프와 직선 $x=6$, x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.
이때 (나)조건에 의하여 $f(4)=6$임을 알 수 있다.
즉, $2^{4-a}-2^{-a}=\frac{15}{2^a}=6$, $2^a=\frac{5}{2}$이다. 따라서
$2^{a+1}=5$이고, $b=-2^{-a}=-\frac{2}{5}$이므로 $10b=-4$이다.
따라서 답은 9이다.

29.
$a_1>1$이거나 $a_1<-1$이면
$a_2<a_3<a_4<a_5<\cdots$ 이므로 자연수 n이 커짐에 따라 a_n의 값 또한 커진다. 따라서 2^{a_n}의 값 또한 커지므로 수열 $\{b_{4n-3}\}$이 등차수열이 될 수 없다.
따라서 a_n의 값은 -1 또는 0 또는 1이다.
만약, $a_1=1$이면 $a_2=0$, $a_3=-1$, $a_4=0$, $a_5=-1$, $\cdots$ 로 수열 $\{a_n\}$은 $1,\ 0,\ -1,\ 0,\ -1,\ \cdots$ 로 나열된다.
수열 $\{b_{4n-3}\}$이 등차수열이므로
$b_{13}-b_9=2^{a_9}+2^{a_{10}}+2^{a_{11}}+2^{a_{12}}$에서
$2^{a_9}+2^{a_{10}}+2^{a_{11}}+2^{a_{12}}$의 값과
$b_9-b_5=2^{a_5}+2^{a_6}+2^{a_7}+2^{a_8}$에서 $2^{a_5}+2^{a_6}+2^{a_7}+2^{a_8}$의 값과
$b_5-b_1=2^{a_1}+2^{a_2}+2^{a_3}+2^{a_4}$에서 $2^{a_1}+2^{a_2}+2^{a_3}+2^{a_4}$의 값이 공차로 서로 같아야 한다.
$2^{a_9}+2^{a_{10}}+2^{a_{11}}+2^{a_{12}}=2^{a_5}+2^{a_6}+2^{a_7}+2^{a_8}$
$=2(2^0+2^{-1})=3$이지만
$2^{a_1}+2^{a_2}+2^{a_3}+2^{a_4}=2^1+2^0+2^{-1}+2^0=\frac{9}{2}$이다.
이때 수열 $\{b_{4n-3}\}$의 공차는 3이고, $a_1\neq1$이다.
수열 $\{a_n\}$은 $\cdots,\ -1,\ ,\ 0,\ -1,\ 0,\ -1,\ \cdots$ 로 나열되므로 수열 $\{a_n\}$의 초항은 -1 또는 0이다.
$b_2=7$, $b_{11}=\frac{27}{2}$의 조건을 통해 수열 $\{a_n\}$의 초항을 구해 보자.
수열 $\{b_{4n-3}\}$이 공차가 3인 등차수열이므로 세 수열 $\{b_{4n-2}\}$, $\{b_{4n-1}\}$, $\{b_{4n}\}$ 또한 공차가 3인 등차수열을 이룬다. $b_{11}=\frac{27}{2}$이므로 $b_7=\frac{21}{2}$,
$b_3=\frac{15}{2}$이다. $b_2=7$이므로 $b_3=b_2+2^{a_2}$에서
$a_2=-1$이다. 따라서 $a_1=0$이다. 이때
$b_2=b_1+2^{a_1}$에서 $b_1=6$이다. $a_1+a_2+a_3=-1$이고
구하는 값은 $(b_1)^{a_1+a_2+a_3}\times b_3=\frac{1}{6}\times\frac{15}{2}=\frac{5}{4}$이다.
따라서 답은 10이다.

30.
$\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=\frac{1}{4}x^4+6x^2-8x+8$
$\cdots$ ㉠,
$f(x)-g(x)=\frac{1}{2}x^2+2x\ \ \cdots$ ㉡
이므로 $f(x)$와 $g(x)$를 각각 구할 수 있다. 하지만, $f(x)g(x)$의 형태로 식을 나타내면 각각의 함수를 쉽게 추측할 수 있으므로 ㉡을 제곱하여 ㉠과 연립한 뒤 $f(x)g(x)$를 구해 보자.
$\{f(x)-g(x)\}^2=\left(\frac{1}{2}x^2+2x\right)^2$
$=\frac{1}{4}x^4+2x^3+4x^2$이므로
$f(x)g(x)=-x^3+x^2-4x+4=-(x-1)(x^2+4)$이다.
따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2$, $g(x)=-2x+2$이거나,
$f(x)=2x-2$, $g(x)=-\frac{1}{2}x^2-2$이다.
((가), (나)조건에서 알 수 있듯이, 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이거나 함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 $-\frac{1}{2}$이어야 한다. 이때 (나)조건을 대~충 보고 $f(x)$가 차수가 더 높을 것이라고 짐작하고 문제가 오류라고 생각할 수 있다. $f(x)$의 이차항의 계수 또한 양수라고 짐작하면서까지!)
각각의 경우 함수 $y=f(x)g(x)+2xf(x)+5$는
$y=x^2+9$이거나 $y=-x^3+5x^2-8x+9$이다.
이때, 함수 $y=x^2+9$는 극댓값을 가질 수 없으므로
$f(x)=2x-2$, $g(x)=-\frac{1}{2}x^2-2$이다.
함수 $h(x)$를 $h(x)=-x^3+5x^2-8x+9$라 하면
$h'(x)=-3x^2+10x-8$이고, $h'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $3x^2-10x+8=(3x-4)(x-2)=0$에서
$x=\frac{4}{3}$ 또는 $x=2$이다.
이때, $x=2$에서 극댓값 $h(2)$를 갖는다.
$h(2)=5$이므로 $a+b=2+5=7$이다.