만점으로 향하는 8개의 Success Code!

一打三披

<일타삼피 수리 가형>

집필 및 검토
김환철 (한양대 컴퓨터공학과) (2012 대수능 수리 가형 100점)
허혁재

문항 개발
김환철, 허혁재, 이해원(연세대 수학과), 임동준(울산대 의예과), Cantata

교재 직접 검토
한○○(서울대 경영학과), 이해원, 네온사in

교재 간접 검토
앨리어스, 망토, 옥떨메, 귀차낭, 원서영역, 루위롱, ardour
김상훈, 김준호, 나병윤, 정원후, 차호동

교재 내용 문의	수학 질문과 토론 게시판에서 교재 내용 문의가 가능합니다. 포만한 수리연구소 → **수학 질문과 토론**	교재 정오표 공지	발간 전에 미처 수정되지 못한 오류를 알려드립니다. 포만한 수리연구소 → **일타삼피's source**	교재 오류 신고	정오표에 반영되지 않은 오류 사항이 있으면 알려주세요. 포만한 수리연구소 → **수학 질문과 토론**

본 교재의 해설지는 포만한 수리연구소(http://pnmath.com) 에서 다운로드할 수 있습니다.

발행일 2012. 2. 24. **최종수정일** 2012. 2. 24 **펴낸곳** 홀로서기

Contents

Success Code	Theme	Page
Success Code 1 다항함수의 그래프와 성질	**Theme 01, Theme 02** 통합특강	
	Theme 01 : 조건을 만족하는 함수를 분석하는 문제	4
	Theme 02 : 낯설게 정의된 함수를 해석하는 문제	12
Success Code 2 함수의 그래프와 성질	**Theme 03, Theme 04** 통합특강	
	Theme 03 : 조건을 만족하는 함수를 분석하는 문제	30
	Theme 04 : 낯설게 정의된 함수를 해석하는 문제	34
	Theme 05 : 구분구적법과 곡선의 길이	35
Success Code 3 삼차원 기하로의 다양한 접근	**Theme 06, Theme 07** 통합특강	
	Theme 06 : 삼수선 정리의 실전적 활용	40
	Theme 07 : 삼차원 도형의 평면화	48
	Theme 08 : 정사영과 그림자	54
Success Code 4 벡터의 다양한 해법	**Theme 09** : 벡터의 다양한 해법	58
Necessary Code 쉽지만 꼭 나오는 단골문항 때려잡기	**Necessary Code** : 쉽지만 꼭 나오는 단골문항 때려잡기	64
Success Code 5 확률과 통계의 통합적 사고	**Theme 10** : 중복조합과 확률	86
	Theme 11 : 통계, 그리고 확률과의 통합	91
Success Code 6 지수로그함수의 그래프와 ㄱㄴㄷ	**Theme 12** : 지수로그함수의 그래프	96
Success Code 7 1%를 변별하는 도전 수열	**Theme 13** : 1%를 변별하는 도전 수열	102
Success Code 8 치환적분과 부분적분의 연산	**Theme 14** : 치환적분과 부분적분의 연산	108
Original Code 새로운 소재를 다룬 독창적인 문제 잡기	**Theme N** : 새로운 소재를 다룬 독창적인 문제 잡기	116

Success Code 1
다항함수의 그래프와 성질

Theme 01 : 조건을 만족하는 함수를 분석하는 문제

함수식을 준 후, 또는 특정 조건을 제시한 후
문제에 부합하는 함수를 분석하는 문제입니다.

Theme 02 : 낯설게 정의된 함수를 해석하는 문제

어떤 함수에 종속된 함수를 낯선 형태로 정의한 후,
정의된 함수에 관한 식의 의미를 해석하는 문제입니다.

Success Code 1

Theme 01 이 기출

삼차함수 $y=f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)-x=0$이 서로 다른 세 실근 α, β, γ를 갖는다.
(나) $x=3$일 때 극값 7을 갖는다.
(다) $f(f(3))=5$

$f(f(x))$를 $f(x)-x$로 나눈 몫을 $g(x)$, 나머지를 $h(x)$라 할 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. α, β, γ는 방정식 $f(f(x))=x$의 근이다.
ㄴ. $h(x)=x$
ㄷ. $g'(3)=1$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Theme 01 02 기출

양의 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수

$$f(x)=\frac{1}{27}(x^4-6x^3+12x^2+19x)$$

에 대하여 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? 〔4점〕

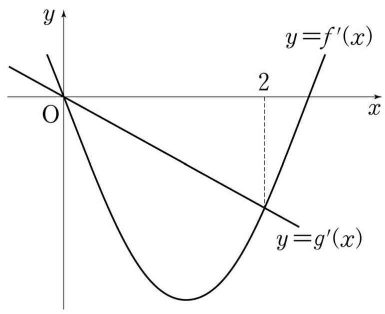
〈보 기〉

ㄱ. 점 $(2, 2)$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=x$의 실근 중 양수인 것은 $x=2$ 하나뿐이다.
ㄷ. 함수 $|f(x)-g(x)|$는 $x=2$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Theme 01 03 기출

삼차함수 $f(x)$의 도함수의 그래프와 이차함수 $g(x)$의 도함수의 그래프가 그림과 같다. 함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하자. $f(0)=g(0)$일 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? 〔4점〕



〈보　기〉

ㄱ. $0<x<2$에서 $h(x)$는 감소한다.

ㄴ. $h(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

ㄷ. 방정식 $h(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Theme 01 04 도전

사차함수 $f(x)$와 양수 a가 다음을 만족시킨다.

(가) $x=2$에서 극값 6을 갖는다.
(나) 방정식 $f(x)-x=0$의 근은 오직 $a, 0, -a$뿐이다.
(다) $f(f(2))<0$, $f'(-a)>1$

$f(f(x))$를 $f(x)-x$로 나눈 나머지를 $g(x)$라 할 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. $f'(0)=1$
ㄴ. $-a$, 0, a는 방정식 $f(f(x))-x=0$의 근이다.
ㄷ. $g'(x)>0$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Theme 01 05 도전

$x \geq 0$에서 정의된 함수 $f(x)=\frac{1}{8}(x^4-8x^3+18x^2)$가 있다. $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 다음 중 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(4, 4)$에서의 접선의 기울기는 2이다.

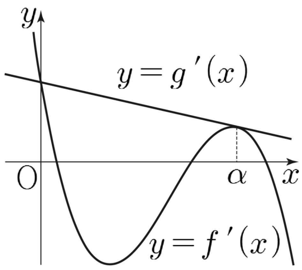
ㄴ. 방정식 $\frac{f(4)-f(x)}{4-x}=1$의 서로 다른 실근은 4개이다.

ㄷ. 함수 $g(x)$는 열린 구간 $(0, 4)$에서 미분 가능하다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Theme 01 06 적중

두 다항함수 $f(x)$의 도함수의 그래프와 $g(x)$의 도함수의 그래프가 그림과 같다. $f(0)=g(0)$, $f'(0)=g'(0)$이고, $x=\alpha$에서 곡선 $y=f'(x)$와 직선 $y=g'(x)$가 접할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



〈보 기〉

ㄱ. $f(\alpha)=g(\alpha)$

ㄴ. 방정식 $f(x)=g(x)$은 서로 다른 2개의 실근을 갖는다.

ㄷ. $\int_0^\alpha f(x)dx < \int_0^\alpha g(x)dx$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

Theme 01 07 도전

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 있다. $a<c<b$인 실수 a, b, c에 대하여 방정식 $f(x)=0$의 근은 a, b이고, 방정식 $f'(x)=0$의 근은 b, c일 때, 다음 중 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? 〔4점〕

〈보 기〉

ㄱ. $a<0$이면 $f'(b-a)<0$이다.

ㄴ. $0<c<\frac{1}{2}b$이면 $f'(b-c)<0$이다.

ㄷ. $f'(a+b-c)<0$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

Theme 01 08 도전

최고차항의 계수가 양수이고, $f'(1)>0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. $f(x)$와 일차함수 $g(x)=-x+4$에 대해 분수방정식

$$\frac{2g(x)-f(x)+16}{g(x)}=\frac{g(x)+16}{f(x)}$$

가 서로 다른 4개의 실근을 갖고, 방정식 $f(x)=g(x)$의 근은 오직 0, 4뿐일 때, $f(x)$의 최고차항의 계수를 구하시오.

Theme 02 이 기출

실수 m에 대하여 점 $(0, 2)$를 지나고 기울기가 m인 직선이 곡선 $y=x^3-3x^2+1$과 만나는 점의 개수를 $f(m)$이라 하자. 함수 $f(m)$이 구간 $(-\infty, a)$에서 연속이 되게 하는 실수 a의 최댓값은?〔4점〕

① -3 ② $-\dfrac{3}{4}$ ③ $\dfrac{3}{2}$ ④ $\dfrac{15}{4}$ ⑤ 6

Theme 02 02 기출

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(0 \leqq t \leqq 5)$ 에서의 속도 $v(t)$가 다음과 같다.

$$v(t)=\begin{cases} 4t & (0 \leqq t < 1) \\ -2t+6 & (1 \leqq t < 3) \\ t-3 & (3 \leqq t \leqq 5) \end{cases}$$

$0 < x < 3$인 실수 x에 대하여 점 P가

시각 $t=0$에서 $t=x$까지 움직인 거리
시각 $t=x$에서 $t=x+2$까지 움직인 거리
시각 $t=x+2$에서 $t=5$까지 움직인 거리

중에서 최소인 값을 $f(x)$라 할 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? 〔4점〕

〈보 기〉

ㄱ. $f(1)=2$

ㄴ. $f(2)-f(1)=\int_{1}^{2} v(t)dt$

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

Theme 02 03 기출

최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=3$, $f'(3)<0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 집합 S를

$$S=\{a \mid \text{함수 } |f(x)-t| \text{ 가 } x=a\text{에서 } \underline{\text{미분가능하지 않다}}.\}$$

라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [4점]

Theme 02 04 기출

함수 $f(x)=-3x^4+4(a-1)x^3+6ax^2$ $(a>0)$과 실수 t에 대하여, $x \le t$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 a의 최댓값은? 〔4점〕

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Theme 02 05 기출

함수 $f(x)=x^3-(a+2)x^2+ax$에 대하여 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 개구간 $(0, 5)$에서 증가할 때, a의 최솟값을 구하시오. [3점]

Theme 02 06 도전

함수 $f(x)=-x^3+ax^2-1$에 대하여 x에 대한 방정식 $3x=f'(t)(x-t)$의 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. $g(t)$가 $t=b$에서만 불연속일 때, ab의 값을 구하시오. (단, $a>0$)

Theme 02 07 도전

최고차항의 계수가 1이고 $f(1)>0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$ 에서의 접선의 x절편을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 다음을 만족할 때, $f'(2)$의 값을 구하시오.

(가) $t=1$에서만 불연속이다.
(나) $t=-1,\ t=0$에서 극값을 갖는다.

Theme 02 08 도전

삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$가 다음 조건을 만족할 때, (a, b)가 나타내는 영역의 넓이를 구하시오.

> (가) $0<a<3$, $b>3$
>
> (나) 직선 $y=6x+k$와 곡선 $y=f(x)$가 접하도록 하는 서로 다른 실수 k가 2개 존재한다.

Theme 02 09 도전

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 있다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$ 에서의 접선의 x절편을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 다음을 만족할 때, $f(4)$의 값을 구하시오.

(가) $t=0$, $t=3$ 에서만 불연속이다.

(나) $\lim_{t \to 3} g(t)$가 존재한다.

(다) 방정식 $g(t)=t$ 의 해가 존재하지 않는다.

Success Code 1

Theme 02 10 도전

최고차항의 계수가 1이고, $f(1)=f'(1)=1$인 사차함수 $f(x)$기 있다. 곡선 $y=f(x)$위의 두 점 $(4-a, f(4-a))$, $(4+a, f(4+a))$에서의 접선의 방정식을 각각 $y=g_1(x)$, $y=g_2(x)$라 할 때, 집합 S를

$$S_a=\{x \mid g_1(x)=g_2(x)\}$$

라 하자. 집합 S_3가 무한집합일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

(단, a는 자연수이다.)

Theme 02 ॥ 도전

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=3$, $f'(4)=-1$ 인 사차함수가 있다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$ 에서의 접선의 방정식을 $g(t)$라 하자. 집합 S를

$$S=\{a \mid \text{ 함수 } |f(x)-g(t)|\text{가 } x=a\text{에서 } \underline{\text{미분 가능하지 않다}}\}$$

라 하고 , 집합 S의 원소의 개수를 $h(t)$라 하자. $h(t)$가 $t=0$, $t=4$ 에서만 극한값이 존재하지 않을 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

Success Code 1

Theme 02 12 적중

최고차항의 계수가 $a(a>0)$인 사차함수 $f(x)$와 일차함수 $g(x)=x+10$이 있다. $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, a의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수)

(가) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 $x=0$, $x=6$에서 접한다.
(나) 함수 $|f(x)-g(x)-f(0)|$ 는 오직 $x=a,\ x=b\ (a<0,\ b>6)$에서만 미분가능하지 않다.

Theme 02 13 도전

최고차항의 계수가 1이고, $f'(1)=f'(-3)=1$, $f(1)=-1$, $f(-3)=-5$를 만족하는 사차함수 $f(x)$가 있다. 집합 S를

$$S=\{a \mid \text{함수 } |f(x)-x-t| \text{ 가 } x=a\text{에서 } \underline{\text{미분가능하지 않다}}.\}$$

라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=-2$, $t=k$에서만 불연속일 때, k의 값을 구하시오.

Theme 02 14 도전

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 있다. $f(x)$와 이차함수 $g(x)=-6x^2+24x+t$에 대하여 $h(x)=|f(x)-g(x)|$ 라 하자. $\alpha<\beta$인 자연수 α, β에 대하여 집합 R, D를 각각

$$R=\{t \mid \text{방정식 } h(x)=0\text{의 근이 오직 } \alpha,\ \beta \text{ 뿐이다}\}$$
$$D=\{t \mid \text{함수 } h(x)\text{가 실수 전체 구간에서 미분 가능하다}\}$$

이라 하자. $R\cap D=\{-9\}$이고, $f(\alpha)=g(\beta)$일 때, $f'(5)$의 값을 구하시오.

Theme 02 15 도전

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g_t(x)$와 집합 S가 다음과 같이 정의된다.

$$g_t(x)=\begin{cases} f(2t-x) & (x<t) \\ f(x) & (x \geq t) \end{cases}$$

$$S=\{a \mid \text{함수 } |g_t(x)| \text{ 가 } x=a\text{에서 } \underline{\text{미분 가능하지 않다}}\}$$

라 할 때, 집합 S의 원소의 개수를 $h(t)$라 하자. $h(t)$가 다음을 만족할 때, $f(5)$의 값을 구하시오. 〔4점〕

> (가) $\lim_{t \to a} h(t) \neq h(a)$인 a는 오직 1, 4뿐이다.
>
> (나) $\lim_{t \to b+0} h(t) \neq \lim_{t \to b-0} h(t)$ 인 b는 오직 0 뿐이다.

Success Code 1

Theme 02 16 도전

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 있다. 함수 $g(x)$와 집합 S가 각각 다음과 같이 정의된다.

$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{2-(x-t)^2} & (|x-t|\le\sqrt{2})\\ 0 & (|x-t|>\sqrt{2})\end{cases}$$

$$S=\{a \mid \text{함수 } |f(x)-g(x)|\text{가 } x=a\text{에서 } \underline{\text{미분 가능하지 않다}}\}$$

집합 S의 원소의 개수를 $h(t)$라 할 때, 다음이 성립한다. 이 때, $f'(4)$의 값을 구하시오.

(가) $h(t)$가 $t=b$, $t=2$, $t=c$ 에서만 불연속이다.
(나) $b, 2, c$가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
(다) 방정식 $\lvert f(x)-h_2(x)\rvert=0$ 의 근은 오직 서로 다른 두 자연수 α, β 뿐이다.

Theme 02 17 도전

사차함수 $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{7}{3}ax^3+7a^2x^2-8a^3x+\frac{8}{3}a^4$와 $0<t<4a$, $s\le t<u$를 만족하는 실수 s, t, u에 대하여 '$f(s)=f(u)$를 만족하는 u의 최대 개수'를 $g(t)$라 하자. 예를 들어, $g(a)=3$, $g(2a)=2$이다. 방정식 $f(x)-f(a)=0$의 세 실근 α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ 중 β에 대하여 $\lim_{t\to\beta+0}g(t)+\lim_{t\to\beta-0}g(t)$ 의 값을 구하시오.

Success Code 1

Theme 02 18 도전

최고차항의 계수가 1이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 집합 S를

$$S=\{a \mid \text{점 } (t, t+8)\text{은 직선 } y=f'(a)(x-a)+f(a) \text{ 위에 있다.}\}$$

라 하고, S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=-2$, $t=b\,(b>2)$에서만 불연속일 때, $f(3)$의 값을 구하시오.