Transforming Of the Past
(T. O. P)

"과거의 변형"이라는 뜻으로, 그간 공개 되었던 수능, 평가원 모의고사의 문제들의 변형 문제집입니다.

- 대표 저자 -
신희철 (인하대학교 수학과)

- 이 책을 검토해 주신 분들 -
김도익 (대전 전민고등학교 졸업)
김동현 (계명대학교 의예과)
김희태 (한양대학교 의예과)
조병인 (한양대학교 의예과)
허재원 (인하대학교 수학과)

Special Thanks to
JJH, HSH, JYE

대학수학능력시험 - 수리영역의 출제방식에 대하여

수리영역은 2, 3, 4점 문항들로 구성되어 있습니다.

1) 2점 문항
기본 개념서에서 볼 수 있는 문제들입니다. 보통 수리영역 1, 2, 3번을 담당합니다.

2) 3점 문항
기본 개념서 및 시중 문제집에서 흔히 볼 수 있는 문제들입니다. 간혹 좋은 소재로 만들어지긴 하나, 난이도가 많이 높지는 않습니다.

3) 4점 문항
수리영역의 등급을 좌우하는 문항들로써, 수험생 개인의 우열을 가리는 문제들입니다. 중위권 이상의 수험생은 4점 문항을 모두 맞겠단 목표로 공부하여야 합니다.

여기서 가장 중요한 4점 문항의 출제 방식을 소개하겠습니다. 아래 예시를 참고합시다.

예시1) 2011 수능 (가)형 24번 문항

> 최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=3$, $f'(3)<0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 집합 S를
>
> $S=\{\,a \mid$함수 $|f(x)-t|$가 $x=a$에서 <u>미분가능하지 않다.</u>$\}$
>
> 라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [4점]

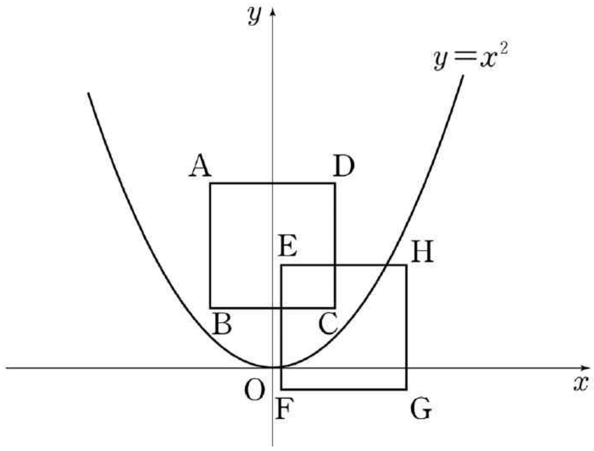
2010 6월 모의고사 (가)형 24번 문항

> 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\dfrac{f'(5)}{f'(3)}$의 값을 구하시오. [4점]
>
> (가) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖는다.
> (나) 함수 $|f(x)-f(1)|$은 오직 $x=a\,(a>2)$에서만 <u>미분가능하지 않다.</u>

두 문제 모두 소재가 똑같아서 재출제된 문항은 정답률이 높지 않을까 싶지만, 두 문항의 정답률은 각각 약 4%, 15%로 오히려 재출제된 문항의 정답률이 낮았습니다.

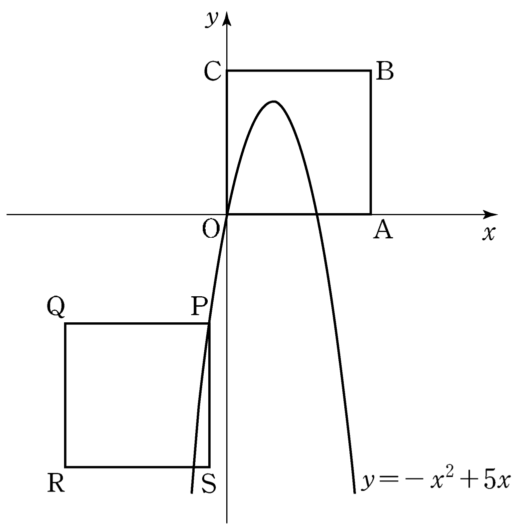
예시2) 2012 6월 모의고사 (나)형 21번 문항

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점의 좌표는 (0, 1)이고, 한 변의 길이가 1인 정사각형 EFGH의 두 대각선의 교점은 곡선 $y=x^2$ 위에 있다. 두 정사각형의 내부의 공통부분의 넓이의 최댓값은? [4점]



2008 6월 모의고사 (가)형 25번 문항

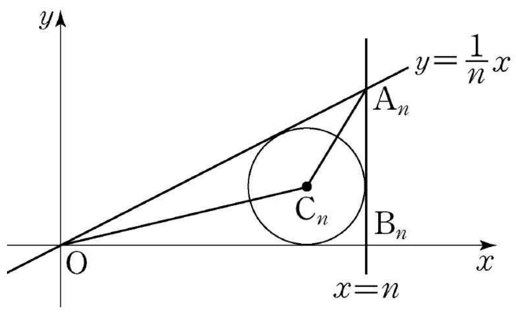
그림과 같이 좌표평면 위에 네 점 O(0, 0), A(8, 0), B(8, 8), C(0, 8)을 꼭지점으로 하는 정사각형 OABC와 한 변의 길이가 8이고 네 변이 좌표축과 평행한 정사각형 PQRS가 있다. 점 P가 점 (−1, −6)에서 출발하여 포물선 $y=-x^2+5x$ 를 따라 움직이도록 정사각형 PQRS를 평행이동시킨다. 평행이동시킨 정사각형과 정사각형 OABC가 겹치는 부분의 넓이의 최대값을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



예시 2) 역시 과거 평가원 모의고사 문항의 소재를 이용하여 재출제한 사례입니다. 두 문항 역시 정답률이 약 40%대로 낮은 편에 속했습니다.

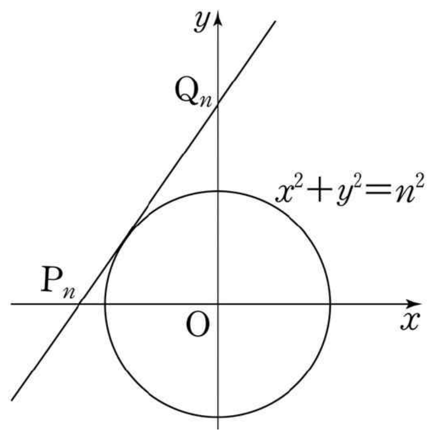
예시 3) 2011 수능 (나)형 14번 문항

좌표평면에서 자연수 n에 대하여 두 직선 $y=\frac{1}{n}x$와 $x=n$이 만나는 점을 A_n, 직선 $x=n$과 x축이 만나는 점을 B_n이라 하자. 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{O}\mathrm{B}_n$ 에 내접하는 원의 중심을 C_n이라 하고, 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{O}\mathrm{C}_n$의 넓이를 S_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$의 값은? [4점]



2011 9월 모의고사 (나)형 8번 문항

좌표평면에서 자연수 n에 대하여 기울기가 n이고 y절편이 양수인 직선이 원 $x^2+y^2=n^2$에 접할 때, 이 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. $l_n=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{2n^2}$의 값은? [4점]



예시3)과 같이 9월 모의고사 문항의 소재가 그 해 수능에 이용되어 재출제 되는 경우도 있습니다. 두 문항의 정답률은 각각 약 50%, 80%로 재출제된 문항의 정답률이 더 낮았습니다.

이렇게, 위와 같이 수능은 과거 수능이나 평가원에 나왔던 소재가 그대로 이용 및 응용되어 재출제되는 경우가 흔합니다. 그래서 수능을 치룬 선배들이 “수능은 기출문제가 제일 중요하다” 라고 말합니다. 이 책은 수능의 출제방식과 똑같이 과거 수능 기출문제를 변형한 문제로 구성되어 있습니다.

변형 예시1) 2009 수능 (나)형 21번 문항

$1 < a < b$인 두 실수 a, b에 대하여 $$\frac{3a}{\log_a b} = \frac{b}{2\log_b a} = \frac{3a+b}{3}$$ 가 성립할 때, $10\log_a b$의 값을 구하시오. [3점]

기출 변형 문항 (T.O.P 수1+미적분과 통계 2단원 23번 문항)

함수 $y = \log_2 x$위의 두 점 $\mathrm{A}(a,\ \log_2 a)$, $\mathrm{B}(b,\ \log_2 b)$에 대하여 $$\frac{\log_2 a}{a} = \frac{\log_2 b}{b} = \frac{3}{a+b}$$ 이 성립하고, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 C, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 D라 하면 사각형 ABDC의 넓이가 3이다. 이 때, $a^2 + b^2$의 값을 구하시오. [4점] (단, $1 < a < b$ 이다.)

수능에 출제되었던 3점 문항을 응용하여 4점 수준의 문항을 제작하여 구성하였습니다. 위와 같이 4점으로 사용될 수 있는 가치를 갖고 있는 3점 문항을 응용하여 4점짜리로 재구성한 문항이 이 책에 상당수 존재합니다.

변형 예시2) 2011 수능 (나)형 30번 문항

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \log\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

를 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{20} a_{2k} = p$라 할 때, 10^p의 값을 구하시오. [4점]

기출 변형 문항 (T.O.P 7단원 16번 문항)

수열 $\{a_n\}$가 자연수 n에 대하여

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = 2 \times {}_{n}\mathrm{H}_3$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

위 문항과 기출 문항은 서로 다른 문항인 듯 보이지만 풀이과정은 흡사합니다.

이런 방식으로 출제된 기출 문항은 얼핏보면 서로 상관이 없는 것 같지만, 풀고 나서 생각하면 알맹이는 똑같습니다. 우리는 이것을 보는 눈을 길러야 합니다. 처음 보는 문항과 예전에 풀어봤던 문항을 푸는 것은 분명한 차이가 있으므로 우리가 정복해야 할 이번해 수능 문제를 “예전에 봤던 것 같은 느낌”이 들도록 우리는 과거 수능 기출문제를 곱씹어 공부해야 합니다. 이 책은 “수능 기출문제를 곱씹는” 과정에 특화 되있습니다.

Transforming.Of.the Past (T.O.P)에 대하여

1) 수능, 평가원, 기출문제의 변형

이 책의 분량의 약 90%는 수능, 평가원의 기출문제들을 변형시켜 구성했습니다. 수능 문제 상당수가 평가원이나 이전 수능문제에서 변형시켜 나온다는 점에서 이 책은 당신이 올바른 수능 공부를 하는데 도움이 될 것입니다.

2) 창의적인 자작문제 수록

어떤 문제집에서도 볼 수 없는 창의적인 자작문제를 수록했습니다. 저자만의 참신함이 돋보일 것입니다. 다가올 신유형에 대비합니다.

3) 합당한 문제 난이도

문제를 억지스럽게 만들거나, 어렵게 구성하려 노력하지 않았습니다. 만약 당신이 어떠한 문제를 못푼다면, 그 문제가 어려운게 아니라 당신의 실력이 부족한 것입니다.

4) 적당한 분량 (수1+미적분과 통계 205p, 수2+기하와벡터 114p)

분량이 너무 많아 구매하고 안보는 책이 많죠? 이 책은 적당한 분량으로 독자가 책을 다 보기 쉽도록 구성했습니다. 이 책은 당신의 실력이 오르는데 쓰여지는 드문 책들 중 한 권이 될 수 있을 것입니다.

5) Q & A?

이 책의 해설지를 보고도 이해가 안되는 문항은 메일 ivorkega@naver.com 이나 포만한의 수리연구소 http://pnmath.com 게시판 또는 오르비 아이디 fin9900으로 질문을 주시면 정성껏 답변해드립니다.

아무쪼록, 수험생 여러분의 건투를 빕니다.

목 차

수학 Ⅱ, 적분

기하와 벡터

“짬”을 이용하지 못하는 사람은 항상 “짬”이 없다.
- 유럽의 속담

승자는 시간을 관리하며 살고, 패자는 시간에 끌려 산다.
- Sydney J. Harris

오늘 가장 좋게 웃는 자는 역시 최후에도 웃을 것이다.
- Friedrich Nietzsche

1단원 : 방정식, 부등식과 삼각함수

※) 다양한 분수방정식의 형태의 해석

모의고사에 나왔던 방정식 $\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(-x)}=1-\frac{f(x)}{f(-x)}$를 예로 들겠습니다. 이 방정식을 보고 바로 해석하는 사람은 드물 것입니다. 이것을 통분하여 다음과 같이 바꿉시다.

$$\frac{f(-x)-f(x)}{f(x)f(-x)}=\frac{f(-x)-f(x)}{f(-x)}$$

그러면, $f(x)\neq 0$, $f(-x)\neq 0$는 무연근이죠? 다음과 같이 경우를 나눕시다.

1) $f(x)=f(-x)$일 경우

방정식이 0이 되어 더 이상 찾아낼 조건이 없네요. 무연근 조건과 함께 그림을 보고 답을 찾으면 됩니다.

2) $f(x)\neq f(-x)$일 경우

분자, 분모를 약분하면, $f(x)=1$이란 조건을 발견할 수 있습니다. 이 조건과 무연근 조건, $f(x)\neq f(-x)$ 조건을 이용하여 그림을 보고 답을 찾으면 됩니다.

위와 같이 보통 분수방정식, 부등식 문제는 식을 주고 계산하는 문제(3점)과 그림으로 함수의 개형을 보여주고 위의 경우처럼 방정식의 약분, 통분, 인수분해 등을 이용하여 조건을 하나씩 찾게 하여 그림으로부터 답을 유도하는 문제 (3점 혹은 4점)으로 출제됩니다. 시험에 적어도 한 문제씩은 꼭 출제되는 유형입니다.

※) 삼각함수의 합성 - 벡터의 내적!

여러분이 삼각함수의 각종 공식들은 모두 암기하고 있다고 가정하겠습니다. 여기서 문제 하나를 제시하겠습니다.

Q. 방정식 $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$의 값이 최대가 될 때의 $\theta\left(0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right)$를 구하시오.

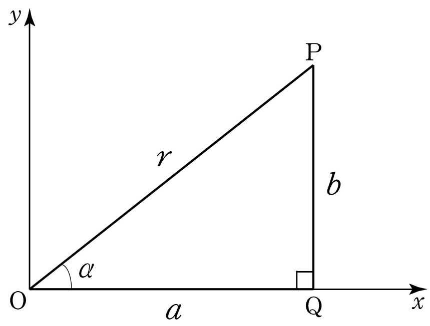
이것을 두 벡터 $(1,\ \sqrt{3})$, $(\sin\theta,\ \cos\theta)$의 내적으로 보겠습니다. 내적이 최대가 되려면? 두 벡터의 방향이 같아야 한다는 것을 이용합시다. 벡터 $(1,\ \sqrt{3})$의 기울기를 조사하면, $\sqrt{3}$입니다. 즉, 벡터 $(\sin\theta,\ \cos\theta)$의 기울기도 $\sqrt{3}$이 되면 됩니다. 따라서 $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\sqrt{3}$이므로 $\theta=\frac{\pi}{6}$입니다.

여기서 벡터 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$는 원 $x^2+y^2=1$위의 임의의 점입니다.

방정식 $a\cos\theta+b\sin\theta$을 두 벡터 $(a,\ b)$, $(\cos\theta,\ \sin\theta)$로 보고 문제를 진행하시면 한결 더 수월하게 문제를 풀 수 있을 겁니다. (벡터의 좌표의 순서는 바뀌어도 상관 없습니다.)

물론 이 방법으로 삼각함수의 합성이 모두 끝나는 건 아닙니다. 기본공식도 충분히 암기하고 계셔야 합니다. 다음은 기본공식의 암기를 돕기 위한 삼각함수 합성의 증명입니다.

$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$임을 증명해봅시다.



위의 그림과 같이 좌표평면에 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$를 잡고, 직선 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α라 합시다. $a=r\cos\alpha$, $b=r\sin\alpha$이고 $r=\sqrt{a^2+b^2}$이므로 삼각함수의 덧셈정리에 의해서 식을 조작하면,

$a\sin\theta+b\cos\theta=r\cos\alpha\sin\theta+r\sin\alpha\cos\theta$

$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\cos\alpha\sin\theta+\sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha\cos\theta$

$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\sin\theta+\sin\alpha\cos\theta)$

$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

입니다.

삼각함수에서 가장 까다로운 부분이 삼각함수의 합성이기 때문에 이 부분 잘 체크해두셔서 아래 문제들을 풀어보시길 바랍니다.

3점 문항

1. 무리방정식 $\sqrt{x-1}=x+k$가 1개의 실근을 가질 때, $k^2=\frac{p}{q}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. [3점] (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

2. 닫힌구간 $[-2, 6]$에서 부등식 $\frac{(x-2)^2(x-3)+4}{x+1} \geq \frac{4}{x+1}$을 만족시키는 모든 정수 x의 합을 구하시오. [3점]

3. $\tan 15^\circ + \frac{1}{\tan 15^\circ}$의 값은? [3점]

① 2　　② $\sqrt{3}$　　③ $2\sqrt{3}$　　④ 4　　⑤ $2-\sqrt{3}$

4. 분수방정식 $\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x-1}=\frac{2}{x^2-1}$의 모든 실근의 합을 k라고 하자. k^2의 값을 구하시오. [3점]

5. 실수 a에 대하여 부등식

$$\frac{(x-1)(x-8)}{(x-a)^2} \leq 0$$

을 만족시키는 자연수 x의 개수를 $f(a)$라고 할 때, $f(a)$의 최댓값을 구하시오. [3점]

6. 자연수 k에 대하여 분수부등식

$$\frac{k}{x-k} \leq \frac{1}{x-1}$$

을 만족시키는 자연수 x의 개수가 2개일 때, 자연수 k의 최댓값을 구하시오. [3점]

7. $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$이 최대가 되는 θ의 값이 $\frac{p}{q}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. [3점]

(단, $0 \le \theta \le \pi$이고 p, q는 서로소인 자연수이다.)

8. $\sin\frac{\theta}{2} = k$일 때, $\cos\theta = \frac{7}{9}$이다. $180k^2$의 값을 구하시오. [3점]

9. 좌표평면 위에서 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$의 꼭짓점이 $(0,\ -1)$일 때, 방정식 $2f(-x) = \sqrt{4|f(-x)|+3}$의 서로 다른 실근의 개수는? [3점]

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4