이과생을 위한 미적분 1 칼럼

1. 평행이동 관점으로의 실근 개수 구하기.
우리는 평균값의 정리에서 다음과 같은 예제를 배웠습니다.

예제 2

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고, 열린 구간 (a, b)에서 미분가능하며 $f'(x)=0$일 때, 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[a, b]$에서 상수함수임을 보여라.

풀이 $a<x\le b$인 임의의 x에 대하여 닫힌 구간 $[a, x]$에서 평균값 정리를 적용하면

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)$$

인 c가 a와 x 사이에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(c)=0$이므로 $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$에서 $f(x)=f(a)$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[a, b]$에서 상수함수이다.

답 풀이 참조

이 내용이 쓰이는 것은 바로 방정식과 부등식에서의 활용 단원입니다.

예제 1

방정식 $\ln x-kx=0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

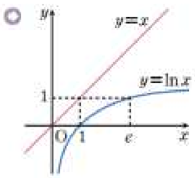
풀이 방정식 $\ln x-kx=0$에서 $\ln x=kx$, $\frac{\ln x}{x}=k$

주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=\frac{\ln x}{x}$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수이다.

$f(x)=\frac{\ln x}{x}$라 하고, $f'(x)=0$인 x의 값을 구하면 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}=0$

즉, $x=e$

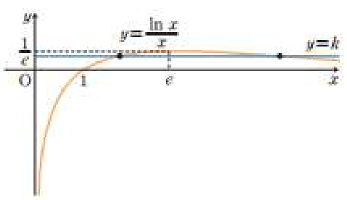
한편, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to 0+} f(x)=-\infty$이다.



직선 $y=x$가 곡선 $y=\ln x$보다 빠르게 증가하므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$임을 알 수 있다.

$x>0$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$ (극대)	↘



따라서 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $0<k<\frac{1}{e}$이다.

여기에서는 x축과 평행한 직선과 그래프의 교점 문제로 변형하여 y=k를 y축으로 평행이동하여 문제를 푸는 관점을 교과서에서 소개합니다.

이 관점은 너무나도 당연합니다.

1. 평행이동이 회전보다 쉽고 예전에 배웠습니다.
2. 모든 실수에 대해서 f'(x)=0이면 f(x)=c임을 배웠습니다. 도함수의 정의에 의해 역도 성립합니다.

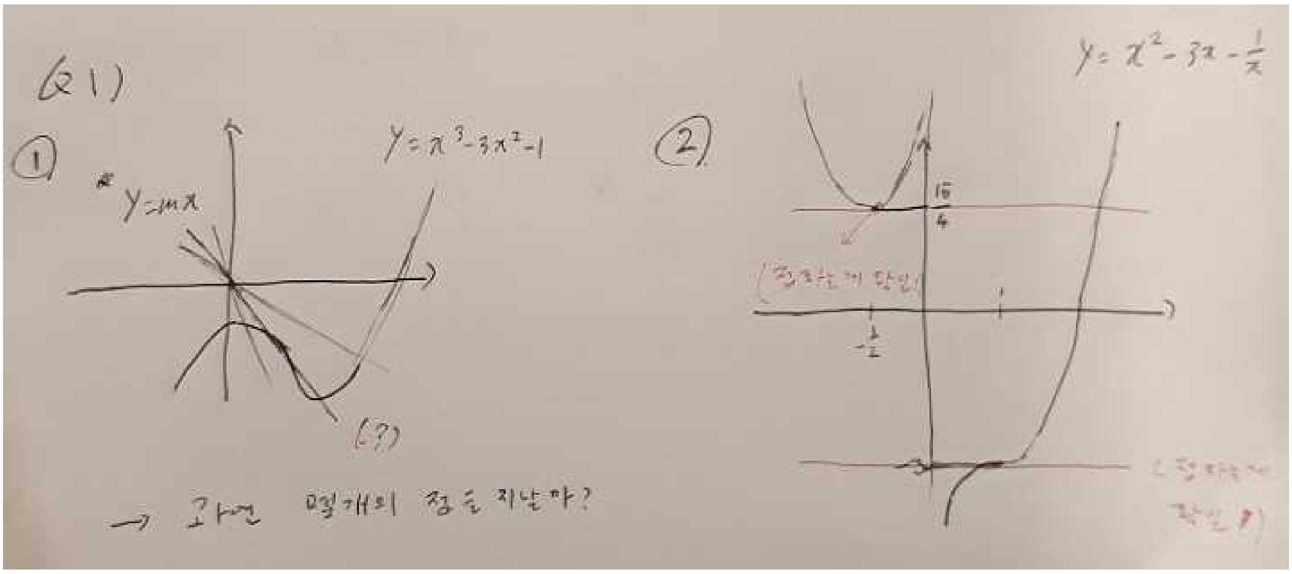
즉, 이 직선을 평행이동 했을 때 극값에서 접하는 것을 우리는 반드시 알 수 있습니다.

실수 m에 대하여 점 $(0,\ 2)$를 지나고 기울기가 m인 직선이 곡선 $y=x^3-3x^2+1$과 만나는 점의 개수를 $f(m)$이라 하자. 함수 $f(m)$이 구간 $(-\infty\ ,\ a)$에서 연속이 되게 하는 실수 a의 최댓값은?

① -3　　② $-\frac{3}{4}$　　③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{15}{4}$　　⑤ 6

예전에 이런 문제를 접근했을 때, 어떻게 했었나요?
물론, 이 문항정도는 회전해도 적용이 가능하긴 합니다.
하지만, 평행이동 할 때가 더 명확한 이유는 교과서의 개념으로 설명할 수 있기 때문입니다!
극값에서 접한다는 것을 반드시 볼 수 있네요!



극대와 극소는 그래프를 구하는데 반드시 필요한 것입니다.
그러므로 교과서의 예제풀이대로 평행이동의 관점을 채택하는 것은 합리적입니다.
이 합리성을 이해하신 이후에, 여러분이 명확하게 풀지 생각이 떠오르는 도구로 적용할지 선택하시면 됩니다.

2. 함수의 극한에 대한 성질과 미분법

함수의 극한에 대한 성질

$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때,

① $\lim_{x\to a} kf(x)=k\lim_{x\to a} f(x)=k\alpha$ (단, k는 상수)

② $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=\alpha+\beta$

③ $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)=\alpha-\beta$

④ $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)=\alpha\beta$

⑤ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$ (단, $\beta\neq 0$)

(이과는 더 중요해..)
미분가능이라는 말은, 극한이 존재한다는 말과 같아요.

즉, 도함수가 존재하여 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$이렇게 쓸 수 있는것은 바로 함수의 극한에 대한 성질에 따른 것입니다.

수렴값, 즉 도함수가 존재한다는 뜻이지요! 그래서 y를 x로 미분했다는 것을 기호로 $\frac{dy}{dx}$로 씁니다.

이 기호는 미분했다는 의미이지, 분수로 쓸 수 없다는 것은 아실 것입니다.

그러나 분수 취급할 수 있습니다! 그 이유는, 미분가능하기 때문입니다!

두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수를 구하여 보자.

x의 증분 Δx에 대한 u의 증분을 Δu라 하고, u의 증분 Δu에 대한 y의 증분을 Δy라고 하면 다음이 성립한다.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} \text{ (단, } \Delta u\neq 0)$$

이때 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$는 미분가능하므로 다음이 성립한다.

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{dy}{du}=f'(u),\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{du}{dx}=g'(x)$$

한편, 함수 $u=g(x)$는 연속이므로 $\Delta x\to 0$일 때, $\Delta u\to 0$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\\&=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(u)g'(x)\\&=f'(g(x))g'(x)\end{aligned}$$

이다.

(출처 : 미래엔 미적분 2 교과서)

함수의 극한에 대한 성질에 의해 $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$ 입니다.

이 **함수의 극한에 대한 성질**을 쓰기 위해서는 $\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{dy}{du}$, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$이어야 합니다.

즉, 두 함수가 미분가능 해야합니다!!

두 함수가 미분 가능하다는 것이 확인이 된다면,

$$\frac{dy}{dx} = (\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}) = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

이 괄호의 식을 머릿속으로 생각하고 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$로 써주어도 됩니다.

미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하고 미분가능할 때, 함수 $y=f(x)$의 도함수와 그 역함수의 도함수 사이의 관계를 알아보자.

$y=f(x)$에서 $x=f^{-1}(y)$이므로 함수 $f^{-1}(y)$의 도함수는 $\frac{dx}{dy}$이다.

함수 $y=f(x)$에서 x의 증분 Δx에 대한 y의 증분을 Δy라고 하면

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} \quad (\Delta y \neq 0)$$

이다. 그런데 $\Delta x \to 0$이면 $\Delta y \to 0$이므로 다음이 성립한다.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

(출처 : 미래엔 미적분 2 교과서)

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{dx}{dy}$여야 성립하는 것입니다. 즉, **함수의 극한에 대한 성질**이 중요합니다.

만약, 미분가능하면 $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$가 존재하고 $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{dx}{dy}$도 존재하므로,

도함수 값이 0이 되는 곳은 존재하지 않을 것입니다.
역함수가 미분 가능한 것이 확인이 되면,

$$\frac{dy}{dx} = (\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}}) = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

괄호의 식을 머릿속으로 생각하면서 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ 로 써주어도 됩니다.

즉 $\frac{dy}{dx}$, 에서의 dy 혹은 dx를 분수 취급 해줘도 된다는 말은 기본적으로 틀린 말입니다.

그러나, 합성함수나 역함수가 미분가능 하다면, 연산을 통한 결과는 분수 꼴이 맞습니다.
보통의 경우 제시된 함수는 모두 미분 가능하기 때문입니다.
그러나, 이 내용 또한 **함수의 극한에 대한 성질**로 접근하시고, 검증하셔야 합니다!

이제 두 함수 $f(t), g(t)$가 미분가능하고 $f'(t) \neq 0$일 때, 매개변수로 나타낸 함수 $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ 의 도함수 $\frac{dy}{dx}$를 구하여 보자.

매개변수 t의 증분 Δt에 대하여 x의 증분을 Δx, y의 증분을 Δy라고 하면 $x=f(t)$, $y=g(t)$가 미분가능하므로

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}, \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}$$

이다. 여기서 함수 $x=f(t)$는 미분가능하고 $f'(t) \neq 0$이므로 $\Delta x \to 0$일 때, $\Delta t \to 0$이다. 따라서

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}}{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

이다.

(출처 : 미래엔 기하와 벡터 교과서)

이하 생략 합니다.

우리가 분수로 계산해줄 수 있는 이유는 이 함수들이 미분가능하여 극한값이 존재하기 때문입니다!

그렇다면 〈생략〉을 통해 우리는 분수 꼴로 쓸 수 있습니다.

이것들은 다 교과서에서 유추할 수 있는 내용이에요!

즉, 미분가능한지 다시 확인해보고 미분법을 적용해보는 습관은 합리적입니다.
물론 여러분께서는 미분가능의 여부를 분석하는 것에 꽤 익숙합니다.

굳이 이러한 사항을 알지 않아도 접근은 가능하지만,
여러분이 외우는 것과 알고 생략하는 것은 이해의 차원에서 다른 이야기입니다.