청의미의 교과서 학습법

made by 이원엽

목차

1. 교과서 개념이 반드시 필요한 이유

1) 기본이기 때문입니다.

수학능력 시험에서는 다음과 같은 성격과 목적을 지니고 있습니다.
-대학 교육에 필요한 수학 능력 측정으로 선발의 공정성과 객관성 확보
-고등학교 교육과정의 내용과 수준에 맞는 출제로 고등학교 학교교육의 정상화 기여
-개별 교과의 특성을 바탕으로 신뢰도와 타당도를 갖춘 시험으로서 공정성과 객관성 높은 대입 전형 자료 제공

즉, 고등학교 교육 과정을 반영하겠다는 이야기입니다. 그것을 완벽하게 반영한 책은 교과서입니다.

다음의 표를 보시길 바랍니다.

〈표 1〉 2019학년도 대학수학능력시험 체제

영역 \ 구분		문항 수	문항 유형	배점		시험시간	출제 범위(선택 과목)
				문항	전체		
국어		45	5지선다형	2, 3	100점	80분	화법과 작문, 독서와 문법, 문학을 바탕으로 다양한 소재의 지문과 자료를 활용하여 출제
수학 (택 1)	가형	30	1~21번 5지선다형, 22~30번 단답형	2, 3, 4	100점	100분	미적분 II, 확률과 통계, 기하와 벡터
	나형						수학 II, 미적분 I, 확률과 통계
영어		45	5지선다형 (듣기 17문항, 읽기 28문항)	2, 3	100점	70분	영어 I, 영어 II를 바탕으로 다양한 소재의 지문과 자료를 활용하여 출제
한국사 (필수)		20	5지선다형	2, 3	50점	30분	한국사에 대한 기본 소양을 평가하기 위해 핵심 내용 위주로 출제
탐구 (택 1)	사회탐구	과목당 20	5지선다형	2, 3	과목당 50점	과목당 30분 (최대 60분)	생활과 윤리, 윤리와 사상, 한국 지리, 세계 지리, 동아시아사, 세계사, 법과 정치, 경제, 사회·문화 9개 과목 중 최대 택 2
	과학탐구	과목당 20	5지선다형	2, 3	과목당 50점	과목당 30분 (최대 60분)	물리 I, 화학 I, 생명 과학 I, 지구 과학 I, 물리 II, 화학 II, 생명 과학 II, 지구 과학 II 8개 과목 중 최대 택 2
	직업탐구	과목당 20	5지선다형	2, 3	과목당 50점	과목당 30분 (최대 60분)	농업 이해, 농업 기초 기술, 공업 일반, 기초 제도, 상업 경제, 회계 원리, 해양의 이해, 수산·해운 산업 기초, 인간 발달, 생활 서비스 산업의 이해 10개 과목 중 최대 택 2
제2외국어/한문		과목당 30	5지선다형	1, 2	과목당 50점	과목당 40분	독일어 I, 프랑스어 I, 스페인어 I, 중국어 I, 일본어 I, 러시아어 I, 아랍어 I, 베트남어 I, 한문 I 9개 과목 중 택 1

출제 범위가 과목명으로 되어있는 과목은 수학과 탐구, 그리고 제2외국어입니다.
국어와 영어는 교과서를 바탕으로 다양한 소재의 지문과 자료를 활용하여 출제합니다.
하지만 수학과 탐구는 그러한 말이 없습니다.
특히 이 과목들은 교과서에 입각한 수능 출제를 지향한다는 것입니다.

기본이라는 이유 하나만으로 보아야하는 이유는 충분합니다.
그러나 여러분들은 그렇게 생각하시지 않기에, 다음의 예시를 보여드리겠습니다.

2) 교과서의 내용은 수능의 모범답안과 연결됩니다.[1]

수능 문제는 문제의 발문에서 어떤 특징을 가진 개념을 써야할지 유추할 수 있게 합니다.
다음 문제를 봅시다.

30. 함수 $f(x)=e^{x+1}-1$과 자연수 n에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=100\,|f(x)|-\sum_{k=1}^{n}|f(x^k)|$$

이라 하자. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

2015학년도 수능 수학 B형 30번

g(x)가 실수 전체에서 미분 가능하도록 하는 자연수의 값의 합을 구하라고 합니다.
미분계수와 도함수 단원에서 미분가능성에 대한 정의가 나와요.

이 정의에 따라서 생각해보면, 절댓값 기호를 포함한 함수는 미분계수가 존재하지 않을 수 있습니다.

한편 함수 $g(x)=|x|$에 대하여

$$\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{g(0+\Delta x)-g(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

$$\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{g(0+\Delta x)-g(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$$

이다.

따라서 함수 $g(x)=|x|$는 $x=0$에서 미분계수가 존재하지 않는다.

일반적으로 함수 $y=f(x)$에 대하여 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$가 존재할 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **미분가능**하다고 한다. 또 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 x의 값에서 미분가능할 때, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 미분가능하다고 한다.

절댓값 안에 있는 수가 음수일 때, 마이너스 부호를 붙이게 되므로 그 때 함수식이 바뀌게 됩니다.
지수함수는 전 구간에서 미분 가능합니다.
하지만, 함수가 바뀐다면 그 바뀌는 지점에서 미분이 불가능할 수 있기에, 그 순간을 찾아야해요.

1) 이 내용은 [공부에 필수적인 3가지 연결] 칼럼의 내용을 인용합니다. 그때의 사진도 같이 인용해서 화질이 안 좋음. ㅂㄷ..

또한 시그마 기호가 있습니다. 시그마 기호의 정의는 수열의 합입니다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

을 합의 기호 $\sum$를 사용하여 다음과 같이 간단히 $\sum_{k=1}^{n} a_k$

로 나타낸다. 즉,

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$$

수열의 정의는 수의 나열입니다. 수열의 규칙을 찾는 이유는, 수를 계속 나열하기 위해서입니다.
그렇다면, 이 문제에 있는 수열의 합도 나열해보면서 생각해봐야합니다.

이제, 모범답안의 방향은 나왔습니다.

(1) 보통 우리가 배우는 함수는 정의역 전체에서 미분 가능해.[2]
하지만 절댓값이 붙어있어서, 어느 순간 함수가 바뀐다면 미분 불가능할 수도 있어.
그 순간을 찾아야해.

(2) g(x)는 수열의 합을 구하라고 하고 있어.
수열은 기본적으로 수의 나열이잖아? 그러면 이것도 어떻게든 나열은 해야겠네?

이 두 가지의 방향은 교과서를 충실히 공부한 사람이라면 떠올릴 수 있었을 것입니다.
솔직히 말씀드리면, 처음부터 저 문제의 모범답안을 머릿속에 그리는 사람은 천재입니다.
보통의 경우, 30번 문제의 갈피를 못 잡는 경우가 대부분입니다. 저도 그랬어요.

하지만, 저 두 개의 질문으로 우리는 풀이의 방향이 보이게 됩니다.
문제의 아이디어는, 종종 이렇게 개념에서 나오곤 합니다.
과연 우리는 교과서의 개념을 제대로 학습하지 않고 아이디어를 낼 수 있을까요?
단언컨대, 평범한 학생이라면 반드시 교과서의 개념부터 고민해야한다고 봅니다.
그래야 수능 당일에 아이디어를 만들 수 있으니까요.

---

2) 다항함수는 실수 전체에서 미분 가능합니다. 함수의 합, 차, 실수배, 곱의 미분법에 의해서 그렇습니다.
지수함수가 미분 가능한 이유는, 지수함수를 미분하면 (상수)×(지수함수) 꼴이 되기 때문에 그렇습니다.
지수함수는 연속임을 배웠습니다. 지수함수를 미분한 (상수)×(지수함수)도 연속이기에 지수함수는 미분 가능합니다.

3) 출제범위 안에서의 문제풀이 도구를 정리할 수 있습니다.

1	위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다.
2	로그함수의 극한값을 구할 수 있다.
3	좌표공간에서 선분의 내분점의 좌표를 구할 수 있다.
4	확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
5	지수함수와 로그함수의 그래프를 그려 보고, 그 성질을 이해한다.
6	포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다.
7	음함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.
8	이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
9	함수의 몫을 미분할 수 있다. 역함수를 미분할 수 있다.
10	수학적 확률의 의미를 이해한다.
11	삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다.
12	중복조합을 이해하고, 그 조합의 수를 구할 수 있다.
13	좌표공간에서 벡터를 이용하여 평면의 방정식을 구할 수 있다.
14	지수함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
15	확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 조건부확률의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다. 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
16	치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
17	순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다. 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다.
18	삼각함수의 극한을 구할 수 있다.
19	삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
20	사인함수를 미분할 수 있다. 접선의 방정식을 구할 수 있다.

21	치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
22	순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다. 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다.
23	삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
24	미분법을 이용하여 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.
25	부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
26	모평균을 추정하고, 그 결과를 해석할 수 있다.
27	사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다.
28	타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다.
29	벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다.
30	삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다. 합성함수를 미분할 수 있다. 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

평가원에서 제시한 교육과정 출제 근거입니다.[3)]
(출처 : 한국 교육과정 평가원 사이트 http://www.suneung.re.kr)

21. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(-1)$의 값은? [4점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $2\{f(x)\}^2 f'(x) = \{f(2x+1)\}^2 f'(2x+1)$이다.
> (나) $f\left(-\dfrac{1}{8}\right) = 1$, $f(6) = 2$

21	치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

29. 좌표평면에서 넓이가 9인 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA 위를 움직이는 점을 각각 P, Q, R라 할 때,

$$\overrightarrow{AX} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AR}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 영역의 넓이가 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

29	벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다.

2 치환적분법

• 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

치환적분법이란 무엇일까?

1 공간벡터와 그 연산

• 공간벡터의 뜻을 알고, 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다.

공간벡터의 덧셈과 뺄셈은 어떻게 할까?

\+ 위치벡터?[4)]

21번 문제는 빼박입니다.. 이거 양변에 치환적분 씌우고 적분상수 구해줄 수 있어야합니다.
(나)조건을 이용해서 어떻게든 대입했으면 풀릴 문제였습니다.

---

3) 양심이 없어 보이는 것은 부정 못합니다. 교과과정으로 풀 수 있는 건 맞으니까요.. 그래도 좀 성의껏 적어주시지..
4) 시점이 A로 일정하므로 위치벡터를 떠올리는 것도 자연스럽습니다. 근데 점이 정말 심하게 많이 움직입니다. 중점의 위치벡터를 떠올렸다해도 이렇게 움직이는 상황에서는 차라리 벡터의 덧셈을 직접 그려보면서 파악하는 것이 낫습니다.

29번의 경우, P와 R이 움직이며 생기는 영역을 AQ벡터를 더하여 옮기면 쉽게 영역이 만들어집니다.
이번 수능의 21번, 29번의 경우, 정말 치환적분법과 벡터의 덧셈을 이용해서 풀리는 문제였습니다.

다른 문항의 경우에도 접근하기 까다로운 문항이 분명 있었을 것이나, 분명 교과서의 개념대로 풀 수 있는 문항입니다.

출제 근거를 잘 보시면 3과목에서 고루 출제했으며, 모든 근거는 교과서의 학습 목표로 적혀있습니다.[5)]
실제로 출제자는 교과서의 학습 목표를 참고하면서 출제했습니다.
또한, 교과서 개념으로 풀 수 있는 방법을 가장 먼저 생각할 수밖에 없습니다.
교과서 개념으로 풀 수 없다면, 출제근거를 적을 수 없기 때문입니다.

물론, 여러분께서 교과서를 그렇게 중요시하지 않는 이유를 이해하고 있습니다.
어차피 개념서나 인터넷 강의를 들어도 잘 아는 내용이고, 거기에 있는 내용이 조금 더 많거든요.

하지만, 시험범위 이외의 따름정리와, 교과외의 개념들. 그리고 교과서의 개념들이 섞이면 안 됩니다.
수능의 모범답안은 교과서의 개념만을 써야합니다.
당연히 안 되면 직관을 쓰고, 교과 외를 쓰셔야합니다. 감을 믿으셔야 합니다.
하지만, 100% 믿을 수 있는 것은 언제나 교과서의 개념입니다. 그게 모범답안과 연결되니까요!

즉, 교과서의 학습 목표와 논리를 충분히 습득할 때, 수능 출제범위 안의 개념들과 도구들을 정리할 수 있다는 것입니다.

100분이 짧은 것은 이해합니다. 하지만, 모범답안이 교과서 개념에 입각하여 쓰이는 것을 안다면
반드시 개념공부를 정확하게 하시고, 언제든지 개념에 입각한 답안을 써내려갈 수 있어야합니다.
그 이상의 심화개념은 개념공부 다음입니다.

3개의 소제목으로 연결 짓긴 했는데, 한 문장으로 요약할 수 있겠습니다.

수능에 교과서적인 관점으로 출제되니까. 당연히 교과서를 공부할 수밖에 없다.[6)]

그렇다면, 어떻게 교과서를 공부하느냐가 질문이 될 것입니다.
다음 챕터에서 분석해보도록 하겠습니다.
들어가기에 앞서, 교과서를 공부하는 것은 정말 지루하고 어려운 작업입니다.
그러나 우리의 공부가 쉬울 때가 있었나요?
공부는 치열하게 고민하고 생각하고 더 따지고 따졌을 때 비로소 공부가 되는 것입니다.
이왕이면 편하고 재미있는 방법을 찾겠지만, 그 방법만을 찾아 헤매는 것은 부적절합니다.[7)]

---

5) 계산해보니 점수 배점이 미적분 : 기하와 벡터 : 확률과 통계 = 41:28:31이었습니다.
6) 이것에 대해서 조금 더 말씀드릴 것은, 교과서보다 개념서가 더 좋다고 말하시는 분이 대다수일 것입니다. 개념서 좋습니다. 인강 좋아요. 그런데 개념서와 인강은 사는데, 교과서는 못사시나요? 출제 범위를 명백하게 담고 있는 책이 교과서일 것입니다. 그 해석을 담은 개념서도 필요할 수 있습니다. 교과서는 수업용 교재이므로 인강도 필요할 수 있습니다. 하지만 기본을 담은 교과서를 필요 없다는 말이 왜 개념서와 인강이 필요 없단 말보다 더 자주 나오는지 이해를 할 수 없습니다.

2. 교과서를 공부하는 방법

1) Terminology는 기본입니다.

예를 들어, 이등변 삼각형이라는 말의 뜻을 생각해봅시다.

두 개의 같은 변 을 가진 삼각형임을 우리는 쉽게 이해할 수 있습니다.

(출처 : 네이버 지식백과)

모든 학문에서는 기본적인 용어들이 존재합니다.

의학에서는 의학용어를 예과생때 반드시 배우게 됩니다.

그렇지 않고서는 의사소통이 되지 않기 때문이에요.

마찬가지로 수학을 조금이라도 배울 때는, 이러한 용어들을 기본적으로 외우셔야 합니다.

예를 들어, 수직선을 생각해볼까요?

수직선의 수는 어떤 뜻일까요?

수직선은 영어로 “number line”입니다. 수를 표시할 수 있는 직선이라는 뜻이에요.

이러한 것들을 보통 용어, 즉 terminology라 하지만, 수학에서는 특히 정의라는 말을 씁니다.

또한, 증명 없이 참으로 인정되는 명제를 우리는 공리라고 합니다.

예를 들면, ‘1은 자연수이다.’, ‘모든 자연수 n은 그 다음 수 n`을 갖는다’, ‘1은 n`이 될 수 없다..’

이러한 증명 없이 받아들여지는 것들을 공리라고 하며, 교과서에 나오는 정의와 공리는 외워주셔야합니다.

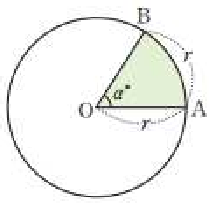
기본 중의 기본입니다. 적어도 용어의 정의는 반드시 기억해주셔야 무리가 없습니다.

7) 답 나온 것 같은데, 아마도 교과서가 노잼이라서 필요 없다고 말하는 듯 합니다. 근데 중요합니다. 뻔해도 중요해요.

하나 더 예를 들어봅시다. 호도법에 관한 내용입니다. (출처 : 미래엔 미적분2교과서)

호의 길이와 중심각의 크기의 관계를 이용하여 각의 크기를 나타내는 방법에 대하여 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 r인 원 O에서 호 AB의 길이가 r인 부채꼴 OAB의 중심각의 크기를 $\alpha°$라고 하면 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하므로



$$r : 2\pi r = \alpha° : 360°, \quad \text{즉 } \alpha° = \frac{180°}{\pi}$$

이다. 따라서 중심각의 크기 $\alpha°$는 원의 반지름의 길이 r에 관계없이 항상 일정하다.

이 일정한 각의 크기 $\frac{180°}{\pi}$를 1**라디안**(radian)이라고 하며, 이것을 단위로 하여 각의 크기를 나타내는 방법을 **호도법**이라고 한다.

○ 라디안(radian)에는 반지름(radius)과 각(angle)의 의미가 들어 있다.

이 정의를 보면, 1 라디안에서의 호의 길이는 반지름의 길이와 같습니다.
즉, 호의 길이가 반지름과 라디안의 곱으로 표시할 수 있습니다.
한자의 의미는 호도법(弧度法)으로 호와 각도라는 의미를 내포하고 있습니다.
이러한 뜻을 이해한다면, 라디안은 호의 길이를 이용하여 각을 정의한 것으로 이해하면 됩니다.

정의는 반드시 기억하셔야 합니다.
개념의 정의는 약속이고, 언어입니다. 그 언어를 모르면 그 이후로 이어지지 않습니다.

여기서 수험생이 아니신 학생에게 드리는 팁 하나는, 한자 공부와 독서를 충분히 하시라는 것입니다.
어휘는 모든 과목에서 기본이 됩니다. 용어의 뜻을 정확히 알고 느끼는 것과 아닌 것의 차이는 커요.
특히 우리나라 단어들은 한자가 쓰이는 경우가 특히 많습니다.
혹시 시간 여유가 된다면 이러한 공부부터 시작해주시면 과목 전반에 도움이 되실 겁니다.

2) 반드시 모든 개념을 논리적으로 설명해야합니다.

이 칼럼은 12월 8일에 쓰였습니다. 즉 여러분은 수험 초기에 글을 읽으시는 것입니다.
수험 초기에서의 개념공부는 반드시 모든 개념을 논리적으로 설명하고 증명하는 것으로 이뤄집니다.

기본적인 정의와 공리는 암기하라고 말씀드렸지만, 그 이상은 논리적인 사고과정을 통해 생각하셔야 합니다.
여러분께서는 어떤 수준까지 생각하셔야할 지 감이 안 잡히실 겁니다. 기준 세워드리겠습니다.

다음은 직선의 방정식을 설명한 부분입니다. (출처 : 미래엔 수학 1 교과서)

좌표평면 위의 한 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선 l의 방정식을 구하여 보자.

직선 l 위의 점 A와 다른 임의의 한 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라고 하면

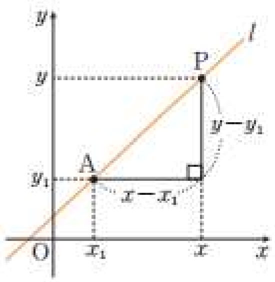
$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=m$$

이다. 양변에 $x-x_1$을 곱하면 직선 l의 방정식은

$$y-y_1=m(x-x_1) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이다. 즉, 직선 l 위의 모든 점 $\mathrm{P}(x, y)$는 방정식 ㉠을 만족한다.

거꾸로 방정식 ㉠을 만족하는 점 $\mathrm{P}(x, y)$는 직선 l 위의 점이다.



① 직선의 정의는 다음과 같은 공리로 설명됩니다.
'두 점을 지나는 직선을 오직 하나 그을 수 있다.', '직선은 양 끝을 갖지 않는 무한히 긴 것이다.'
또한, 우리는 중학교의 일차함수에서 직선 위의 두 점 사이의 기울기는 일정한 것을 배웠습니다.

즉, 고등학교 수학 1의 직선의 방정식을 배울 때,

'직선위의 임의의 두 점 사이의 기울기는 일정하다!'

정도는 이미 알고 있는 개념으로 생각해도 됩니다.

② $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=m$이라는 식은,

주어진 점 A와 임의의 점 P에 대하여, 기울기가 m으로 일정하다는 뜻입니다.
여기까지는 우리가 알고 있는 직선의 정의입니다.
이것을 양변에 같은 수를 곱하여 이항한 식인 $y-y_1=m(x-x_1)$은 직선의 방정식입니다.

이건 여러분이 실제로 증명하시고 유도하셔야 하는 거라고요.

교과서는 여러분이 알고 있는 정의를 통해 새로운 것을 계속 쌓을 수 있도록 설명이 되어있어요.

더 예를 들어볼까요?

원이란, 한 점으로부터 길이가 일정한 점들의 자취라고 합니다.
다음은 원의 방정식을 설명한 부분입니다. (출처 : 미래엔 수학 1 교과서)

좌표평면 위에서 중심이 $\mathrm{C}(a,\ b)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식을 구하여 보자.

이 원 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면 $\overline{\mathrm{CP}}=r$이므로

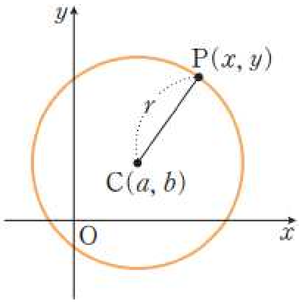
$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

이다. 이 식의 양변을 제곱하면 다음과 같다.

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

즉, 중심이 $\mathrm{C}(a,\ b)$이고 반지름의 길이가 r인 원 위의 모든 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$는 방정식 ㉠을 만족한다.

거꾸로 방정식 ㉠을 만족하는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$는 중심이 $\mathrm{C}(a,\ b)$이고 반지름의 길이가 r인 원 위의 점이다.



① $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$ 은, 여러분이 두 점 사이의 거리를 배운 상태에서,
(a, b)에서부터 거리가 r인 점 (x, y)라는 뜻을 식에서 발견할 수 있습니다. 원의 정의입니다.

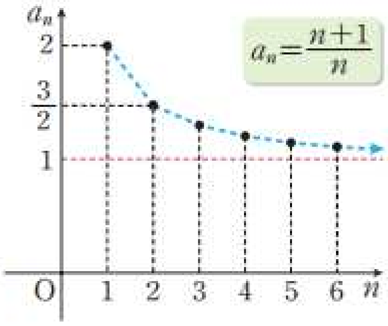
② 비록 양변에 제곱만 해서 정리한 식이긴 합니다만, $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$을 정의와 관계없이 그대로 외우기만 한다면, 여러분은 외울 것과 이해할 것을 착각하고 계시는 것일지도 모릅니다.

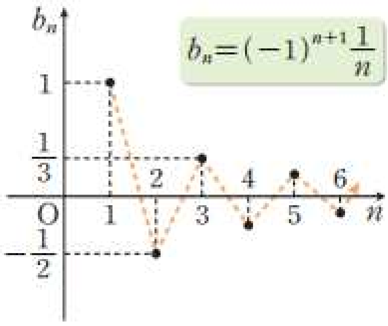
제가 지금까지 많이 학생들을 봐왔습니다만,
대부분이 개념공부를 모두 외우는 것으로 생각합니다.
정의와 그에 따른 정리는 구별하셔야합니다.
정의는 외우시고, 그에 따른 정리는 정의를 통해서 유도하셔야합니다.

정의를 통해 정리를 유도하는 과정은 꼭 필요합니다.
정리를 외우면 암기한 지식이 되지만,
정의를 통해 유도한다면 정의에서 나온 당연한 사실이 됩니다.
이를 위해 개념공부를 하는 것이며, 교과서가 필요한 것입니다.

이제, 조금 예를 더 들어보도록 합시다.

다음은 수열의 극한을 설명한 부분입니다. (출처 : 미래엔 미적분 1 교과서)





위의 그래프에서 n이 한없이 커질 때, 수열 $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$의 일반항 $\frac{n+1}{n}$의 값은 1에 한없이 가까워지고, 수열 $\left\{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right\}$의 일반항 $(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$의 값은 양, 음의 부호를 교대로 가지면서 0에 한없이 가까워진다.

여기서 n이 한없이 커지는 것을 기호 ∞를 사용하여 $n \to \infty$로 나타내고, ∞는 **무한대**라고 읽는다.

일반적으로 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 α에 **수렴**한다고 한다.

이때 α를 수열 $\{a_n\}$의 **극한값** 또는 **극한**이라 하고, 이것을 기호로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha \quad \text{또는} \quad n\to\infty \text{일 때, } a_n\to\alpha$$

와 같이 나타낸다.

①수열의 n이 무한히 커지는 것을 상상하는 것은 어렵지 않습니다. 일반항이라는 규칙을 가지는 수열에 대해서, 자연수 n이 끊임없이 1씩 증가하는 것은, 자연수의 정의와 수열의 정의로부터 상상이 가능한 내용입니다.

주의 수열의 극한에 대한 기본 성질은 수렴하는 수열에 대하여 성립한다.

수열의 극한에 대한 기본 성질

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ (α, β는 실수)일 때,

① $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha+\beta$

② $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha-\beta$

③ $\lim_{n\to\infty} ka_n=k\lim_{n\to\infty} a_n=k\alpha$ (단, k는 상수)

④ $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} a_n\cdot\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha\beta$

⑤ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}=\frac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n\neq0$, $\beta\neq0$)

★ 또한, 수열의 극한의 개념을 통해 극한에 대한 기본성질 또한 이해할 수 있습니다.

다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n-4}{n^2+4}$ (2) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n}-n)$

이러한 문제의 해법을 고민할 때, 보통의 학생은 문제집의 풀이방법을 외우게 됩니다.

① 수렴하는 수열의 합, 차, 곱의 극한은 구할 수 있지만,
분모가 0이 되는 나눗셈의 경우와, 발산하는 경우는 구할 수 없다.
② 어떻게 수렴하는 수열의 합, 차, 곱, 혹은 분모가 0이 되지 않는 분수의 극한으로 만들까?

이렇게 기본 개념을 확장해서 문제 풀이 방법을 확립하는 것과 아닌 것의 차이는 큽니다.
위에 말씀드렸듯이, 버거운 암기 vs 당연히 아는 것의 차이입니다.

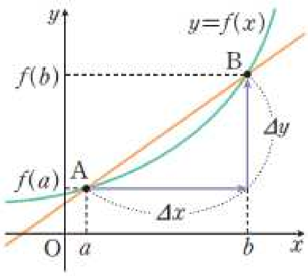
마지막으로 하나 더 보여드리겠습니다.
다음은 미분계수를 설명한 부분입니다. (출처 : 미래엔 미적분 1 교과서)

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때, y의 값은 $f(a)$에서 $f(b)$까지 변한다.

이때 x의 값의 변화량 $b-a$를 x의 **증분**, 이에 대한 y의 값의 변화량 $f(b)-f(a)$를 y의 **증분**이라 하고, 이것을 기호로 각각 Δx, Δy와 같이 나타낸다. 즉,

$$\Delta x=b-a$$
$$\Delta y=f(b)-f(a)=f(a+\Delta x)-f(a)$$

이다.



일반적으로 x의 증분 Δx에 대한 y의 증분 Δy의 비율

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

를 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 **평균변화율**이라고 한다.

평균변화율은 두 점 $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기와 같다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

평균변화율

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

정의입니다. 함수 안에서의 두 점의 기울기를 설명하고 있습니다.
우리는 기울기의 정의를 배웠기에 이해할 수 있습니다.

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+\Delta x$까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

이다. 여기서 $\Delta x \rightarrow 0$일 때, 평균변화율의 극한값

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

가 존재하면 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 **미분가능**하다고 한다.

이때 이 극한값을 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 **순간변화율** 또는 **미분계수**라 하고 기호로 $f'(a)$와 같이 나타낸다.

또한, 함수 $y=f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 x의 값에서 미분가능할 때, 함수 $y=f(x)$는 그 구간에서 미분가능하다고 한다.

특히, 함수 $y=f(x)$가 정의역에 속하는 모든 x의 값에서 미분가능할 때, 함수 $y=f(x)$는 미분가능한 함수라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

미분계수

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

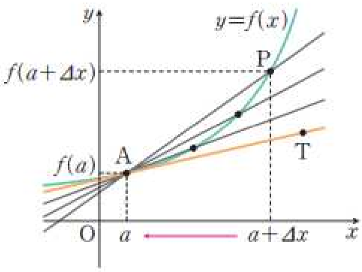
미분계수와 미분가능의 정의입니다.
미분계수는 평균변화율의 극한값이라 하며, 평균변화율의 극한값이 존재하면 미분 가능합니다.

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+\Delta x$까지 변할 때의 평균변화율

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

는 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(a, f(a))$, $\mathrm{P}(a+\Delta x,\ f(a+\Delta x))$를 지나는 직선 AP의 기울기를 뜻한다.

여기서 점 A를 고정하고 $\Delta x \to 0$으로 하면 점 P는 곡선 $y=f(x)$를 따라 점 A에 한없이 가까워지고, 직선 AP는 점 A를 지나는 일정한 직선 AT에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.



이 직선 AT를 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이라 하고, 점 A를 접점이라고 한다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수

$$f'(a)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a, f(a))$에서의 접선의 기울기와 같음을 알 수 있다.

이것은 미분계수의 기하학적 의미입니다.
기본적으로 미분계수의 정의까지는 여러분께서 두 점 사이의 기울기, 함수의 극한의 내용을 아신다면, 그것을 이용하여 새롭게 정의하는 것이 가능합니다.
하지만, 이것의 의미가 정확하게 무엇인지는 이 부분을 공부하면서 정확하게 파악하셔야 합니다.

저라면 이 파트를 이렇게 생각하겠습니다.

① 접선이라는 것은, 한 점에서 접하면서 지나가는 직선이잖아?[8]
② 두 점이 존재하지 않으면 직선을 정확하게 정의할 수는 없을 텐데..
③ 극한의 개념을 이용하면, 함수의 그래프 위의 두 점을 지나는 직선이 접선에 한없이 가까워질 상황을 상상할 수 있겠구나![9]
④ 그게 바로 미분계수의 정의였구나!

이렇게 생각하고 앞으로의 미분계수의 개념을 생각할 때, 접선의 개념과 연결 지어 보겠습니다.
이 이후에는 도함수의 개념이 나오는데, 함수의 개념을 이용하여 x값에 미분계수를 대응한 함수로 생각할 수 있으며, 이 이후의 도함수의 활용 단원에서 접선의 개념을 같이 염두에 두실 수 있습니다.

개념에 따른 성질들, 그리고 정리들은 반드시 논리적으로 유도하셔야합니다.
여러분의 지식이 암기가 아닌 당연한 것이 되기 위해서는 말입니다.
혹시라도, 개념을 분명 배웠는데 자꾸 까먹는다면 위의 것을 고민해보세요.
개인적으로는, 교과서의 모든 공식들과 정리는 증명해보고 넘어가는 게 낫습니다.[10]

---

8) 정확한 정의는 이다음에 할 수 있어요. 그동안 우리는 원과 이차함수의 접선의 정의에서 그래프의 한 점을 스치고 지나는 직선을 접선으로 생각했습니다. 이 이후에는 접선을 할선의 극한으로 정의합니다.
9) 당연하지만, 이 말을 요약하면 할선의 극한이라는 말이 됩니다.
10) 저는 도함수 공식 전부 직접 수식으로 유도했었습니다. 제가 3반수할 때 시작은 6월부터였습니다. 많은 학생들이 시간이 부족하다는 변명을 하십니다만, 교과서 전부의 내용을 보면서 따라 유도한다고 해도 일주일 안 걸립니다. 귀찮아서 그래요..

3) 연결해야 합니다.

여러분은 개념을 문제에만 연결하는 방식으로 공부하셨을지 모릅니다.
하지만, 개념을 문제에 연결하는 그 당시에는 개념이 기억나지만, 추후에는 기억이 안 나게 되어요.

그러므로 제가 여러분께 제안하는 것은! 개념과 개념을 연결하는 것입니다!

이것은 예전에 [공부에 필요한 3가지 연결]이라는 칼럼에 적어놓긴 했습니다.
한번 예를 들어볼까요? 2)번 챕터로 다시 돌아가 보시겠어요?
안 돌아가실 것 같아서 제가 직접 해드립니당.

① 직선의 정의는 다음과 같은 공리로 설명됩니다.
‘두 점을 지나는 직선을 오직 하나 그을 수 있다.’, ‘직선은 양 끝을 갖지 않는 무한히 긴 것이다.’
또한, 우리는 중학교의 일차함수에서 직선 위의 두 점 사이의 기울기는 일정한 것을 배웠습니다.

즉, 고등학교 수학 1의 직선의 방정식을 배울 때,

‘직선위의 임의의 두 점 사이의 기울기는 일정하다!’

정도는 이미 알고 있는 개념으로 생각해도 됩니다.

다음도 보시죠.

① $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$ 은, 여러분이 두 점 사이의 거리를 배운 상태에서,
(a,b)에서부터 거리가 r인 점 (x,y)라는 뜻을 식에서 발견할 수 있습니다. 이것은 원의 정의입니다.

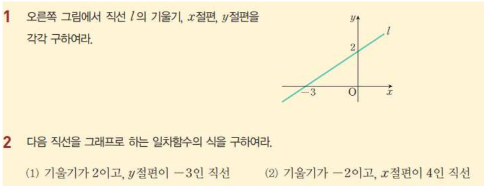
② 비록 양변에 제곱만 해서 정리한 식이긴 합니다만, $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$을 정의와 관계없이 그대로 외우기만 한다면, 여러분은 외울 것과 이해할 것을 착각하고 계시는 것일지도 모릅니다.

그 다음도.

①수열의 n이 무한히 커지는 것을 상상하는 것은 어렵지 않습니다. **일반항이라는 규칙을 가지는 수열에 대해서, 자연수 n이 끊임없이 1씩 증가하는 것은, 자연수의 정의와 수열의 정의로부터 상상이 가능**한 내용입니다.

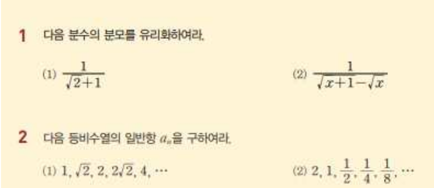
이렇게, 제가 개념을 설명할 때, 앞선 개념의 내용을 반드시 설명하곤 했습니다.
직선의 방정식 개념을 공부할 때, 중학 수학의 일차함수의 개념을 떠올립니다.
원의 방정식 개념을 공부할 때, 중학수학의 원의 개념과 수학 1의 두 점 사이의 거리를 떠올립니다.
수열의 극한을 공부할 때, 수2의 수열의 개념과, 초등수학의 자연수의 정의를 떠올립니다.

이 정도로 기억한다면 여러분이 과연 개념을 까먹을 수 있을까요?
또한 그걸 기억하라고 교과서에는 이렇게 맨 단원 앞에 문제를 넣어줍니다![11]


1 오른쪽 그림에서 직선 l의 기울기, x절편, y절편을 각각 구하여라.

2 다음 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 구하여라.

(1) 기울기가 2이고, y절편이 -3인 직선 (2) 기울기가 -2이고, x절편이 4인 직선


1 다음 분수의 분모를 유리화하여라.

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

2 다음 등비수열의 일반항 a_n을 구하여라.

(1) $1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, \cdots$ (2) $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$

11) 이 정도 되면, 교과서 갓갓 인정해야하는 각 아닙니까. ㅁㄴㅇㄹ (출처는 수1, 미적분1 미래엔 교과서입니다.)

한 가지 예를 더 들면, 저는 이차방정식의 근의 공식을 외우지 않아도 된다고 생각합니다.
이차방정식의 해법은 두 가지 입니다. 인수분해와 근의 공식.
이 두 가지에 공통점이 있다는 사실을 여러분은 아시나요?
이놈의 개념빌런 청의미는 그 사실을 2년 전에 개념칼럼으로 올린 적이 있습니다.[12]

전체공개 2017.01.21. 00:07

일반청의미(i156****) 수만휘괴수 https://cafe.naver.com/suh

이 칼럼은 오르비에 올렸던 칼럼들을 정리해서 올리는 것입니다.

칼럼은 질문과 답변 형식으로 쓸 계획입니다.

공부의 양은 생각의 양과 같고, 생각과 고민은 질문에서 나옵니다

이게 진짜 문제입니다.

분명한건 생각과 고민이 공부의 양이라는 점이에요.

이것에 대해서는 나중에 써보도록 하겠습니다. 일단 시작할게요.

이차방정식의 해법인 인수분해와 근의공식은

어떤 공통점이 있을까?

(절망적인 칼럼.jpg)

후.. 하여튼 그렇고요.

저는 이렇게 설명합니다.

이 전에 우리는 일차방정식과 연립방정식을 배웠습니다.
연립방정식의 해법도, 두 방정식을 만족하는 공통적인 해가 존재하리라 가정하고
가감법, 혹은 대입법을 이용해서 **일차방정식을 만든 후**, 일차방정식을 두 번 풀었어요.

인수분해의 경우, $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$으로 분해한 후,
$(x-\alpha)=0$과 $(x-\beta)=0$이라는 두 개의 **일차방정식을 푸는 형태**였잖아요?

근의 공식의 원리도 마찬가지였어요.
이차방정식 그대로의 형태로 풀지 못합니다.
그래서 완전제곱식의 형태로 좌변을 만들어줬어요.

양변에 루트를 씌워서 **일차방정식으로 만들어서 풀려고**요!

이것을 이해하면, 여러분께서는 고차방정식의 해법도 이와 같음을 이해하실 겁니다.

---

12) 그리고 아무도 안 봐서 묻혔습니다. 후.. 여러분은 개념을 안 해요. 몇 번을 개념칼럼 올렸는데 다 묻히더라.

인수분해해서 최대한 일차방정식으로 만들어서 풀어버린다.
즉, 방정식의 해를 구하는 기본 방법은 일차방정식임을 이해하실 수 있습니다.

이제, 이차방정식의 해법이나 근의 공식을 혹시라도 까먹으셨더라도 다시 생각할 수 있어요.
또한, 개념의 원리를 더욱 잘 이해할 수 있게 되었습니다. 이게 바로 개념 연결의 목적이에요.

또 하나의 예를 들어볼까요?
다음은 도함수를 설명한 부분입니다. (출처 : 미래엔 미적분 1 교과서)

임의의 실수 a에 대하여 함수 $f(x)=x^2$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는

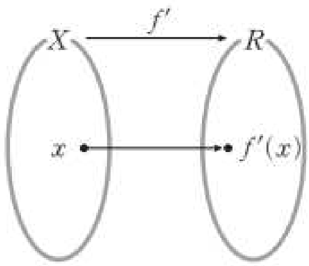
$$f'(a)=2a$$

이다. 따라서 실수 a의 값에 따라 미분계수 $f'(a)$의 값이 하나씩 정해진다.

일반적으로 함수 $y=f(x)$가 정의역에 속하는 모든 x의 값에서 미분가능할 때, 정의역에 속하는 모든 x에 대하여 미분계수 $f'(x)$를 대응시키면 새로운 함수

$$f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

를 얻는다.



이때 이 함수 $f'(x)$를 함수 $f(x)$의 도함수라 하고, 이것을 기호로

$$f'(x),\quad y',\quad \frac{dy}{dx},\quad \frac{d}{dx}f(x)$$

와 같이 나타낸다.

이 개념은 어떻게 이해할 수 있을까요?
함수는 x에서 y로 대응하는 규칙입니다! 이것은 우리가 수학 2에서 배웠었어요.
그 규칙이 다음과 같은 것입니다.

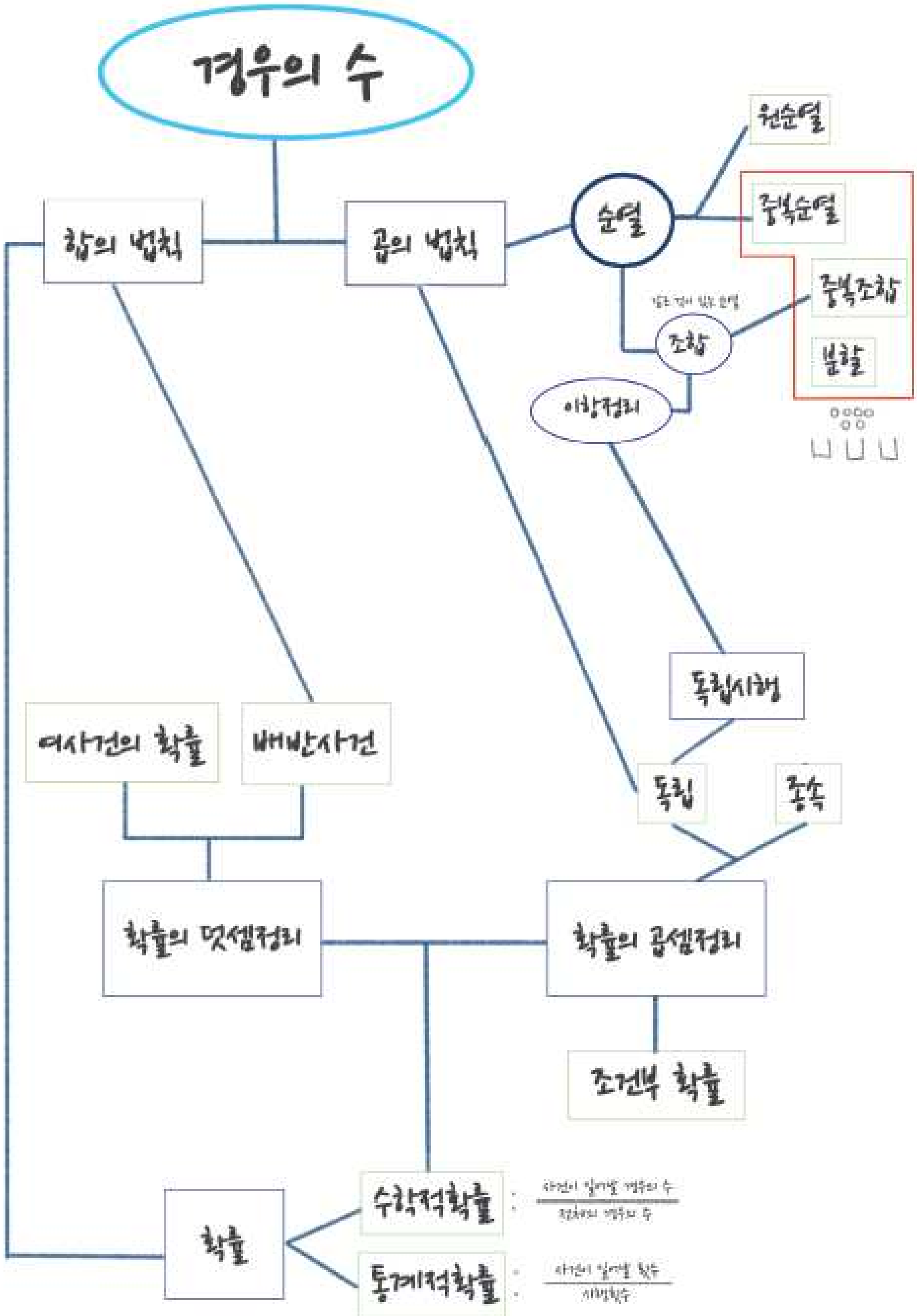
x에 대응하는 y값이 함수 f(x)의 미분계수인 규칙을 가진 함수.

즉, 이 개념은, 수학 2의 함수 개념과 미적분 1의 미분계수의 개념으로 이해할 수 있는 것입니다.
여러분은 모든 개념을 이렇게 연결 지으실 수 있으신가요? 진짜 모든 개념 맞으신가요?
그렇다면, 굳이 개념공부 더 하실 수준은 아니십니다.

하지만, 보통은 이렇게까지는 하지 않으십니다. 지금 개념을 공부하는 단계라면 한번 고려해보세요!

3. 교과서 복습법 : 교과서의 개념끼리의 연결

교과서를 복습하는 방법은 단연 백지복습법입니다.
여러분이 아는지 모르는지는 안보고 바로 머릿속에 그릴 정도여야해요.
이제, 그 방법이 문제인데, 저라면 이렇게 백지복습 하겠습니다.
(출처 : 세상에서 가장 쉬운 수학 확률과 통계)[13]



백지 복습의 방법은 두 가지 방법으로 합니다.

13) 사실 경우의 수와 확률을 연결해야하는데……. 그림을 제가 그리지 않아서..ㅁㄴㅇㄹ

① 목차를 모두 백지에 쓰고, 그와 관련한 개념과, 정리의 증명을 하시면서 복습하세요.
② 그리고 예전 개념이 어떻게 그 개념과 관련 있는지를 이해하고 연결하셔야합니다. 위처럼요.

이 두 가지 방법으로 여러분이 개념을 그 의미까지 확실히 기억하는지를 파악할 수 있습니다.

저 그림으로 예를 들어볼게요. 경우의 수와 확률의 관련성을 먼저 봅시다.

수학적 확률은 표본공간의 근원사건이 나올 확률이 모두 같음을 전제하고,
사건이 일어날 경우의 수를 전체 경우의 수로 나눠주어 계산합니다.
즉, 우리가 구해야할 것은, 전체의 경우의 수와 사건의 경우의 수입니다.

기본적으로 사건과 표본공간은 집합이므로, 경우의 수에서 n(S)만 나눠주면 확률이 됩니다.
즉, 경우의 수에서 배웠던 합의 법칙과 곱의 법칙이 확률에서의 덧셈정리와 곱셈정리에 연결되는 것.

특히, 합의 법칙의 전제조건인 동시에 일어나지 않음은 배반사건과 연결되는 것을 발견하면,
곱의 법칙에서 풀었던 문제의 케이스가 독립사건의 경우임을 쉽게 발견하실 수 있습니다..

이런 정도의 연결정도는 누구나 하실 수 있는 것입니다.

이렇게 하시면, 아마 모든 개념을 수월하게 연결 지으실 수 있으실 것입니다.
나중에 기출 분석을 하시면서 이런 식으로 체계적인 개념들을 꺼내 쓰시면 충분하십니다!

4. 교과서와 문제의 연결 : 왜 예제를 안볼까?

이제는 예제를 볼 때입니다..

여러분, 교과서의 예제는 교과서가 제시한 모범풀이입니다.
그렇다면, 적어도 이 예제의 풀이가 왜 옳은지 정도는 토론해봐야 하지 않을까요?

예를 들어볼까요?
다음은 수열의 극한 예제입니다. (출처 : 미래엔 미적분 1 교과서)

다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n \to \infty} \frac{2n^2+3n-4}{n^2+4}$ (2) $\lim_{n \to \infty} (\sqrt{n^2+n}-n)$

풀이 (1) 분모의 최고차항 n^2으로 분자, 분모를 각각 나누면

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n^2+3n-4}{n^2+4} = \lim_{n \to \infty} \frac{2+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}}$$

$\lim_{n \to \infty} \frac{3}{n}=0$, $\lim_{n \to \infty} \frac{4}{n^2}=0$이므로

$$= \frac{2+0-0}{1+0} = 2$$

(2) 분자, 분모에 각각 $\sqrt{n^2+n}+n$을 곱하여 분자를 유리화하면

$$\lim_{n \to \infty} (\sqrt{n^2+n}-n)$$
$$= \lim_{n \to \infty} \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}$$
$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

분자, 분모를 n으로 각각 나누면

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

$\lim_{n \to \infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}}=1$이므로

$$= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

답 (1) 2 (2) $\frac{1}{2}$

왜 이렇게 풀었을까? 당연히 답은 명백합니다.
수렴하지 않는 수열의 계산이니까 분모와 분자를 같은 수로 나눠주어 수렴하는 수열로 바꿉니다.
분모가 0으로 수렴하지 않도록 나눠주고, 수렴하는 수열의 극한의 계산 성질에 의해 해결합니다!

왜 분자를 유리화 할까요? 답은 명백합니다!
수렴하지 않는 수열의 차를 구할 수는 없기 때문에 어떻게든 변형을 하는 것입니다!

예를 더 들어볼까요?
다음은 접선의 방정식 예제 두개입니다. (출처 : 미래엔 미적분 1 교과서)

2 곡선 $y=x^2+x-2$에 접하고 기울기가 3인 접선의 방정식을 구하여라.

풀이	$f(x)=x^2+x-2$라고 하면	$f'(x)=2x+1$
	접점의 좌표를 $(a,\ a^2+a-2)$라고 하면 접선의 기울기가 3이므로	$f'(a)=2a+1=3$, 즉 $a=1$
	따라서 접점의 좌표는 $(1,\ 0)$이므로 구하는 접선의 방정식은	$y-0=3(x-1)$ 즉, $y=3x-3$

답 $y=3x-3$

3 점 $(1,\ -2)$에서 곡선 $y=x^2+1$에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

풀이	$f(x)=x^2+1$이라고 하면	$f'(x)=2x$
	접점의 좌표를 $(a,\ a^2+1)$이라고 하면 접선의 기울기는	$f'(a)=2a$
	따라서 접선의 방정식은	$y-(a^2+1)=2a(x-a)$ 즉, $y=2ax-a^2+1$ ······ ㉠
	이 접선은 점 $(1,\ -2)$를 지나므로 a의 값을 구하면	$-2=2a-a^2+1$, $(a+1)(a-3)=0$ 즉, $a=-1$ 또는 $a=3$
	a의 값을 ㉠에 대입하여 접선의 방정식을 구하면	$y=-2x$ 또는 $y=6x-8$

답 $y=-2x$ 또는 $y=6x-8$

왜 접점의 좌표를 임의로 두어야했을까?
미분계수의 정의는 접점에서의 접선의 기울기를 의미해.

직선은 한 점과 기울기를 이용해서 정의할 수 있어.
그런데, 2번 문제는 한 점이 없네? 그렇다면 접선의 기울기와 미분계수가 같음을 이용하여, 접점을 임의로 정해서 접선의 기울기와 미분계수가 같을 때의 x값을 구해보자!
3번 문제는 기울기와 한 점 둘 다 없으니까, 접점을 임의로 정할 수밖에 없어.
그래야 한 점과 기울기가 나올 테니까. 나중에 주어진 점을 지나는지 확인만 해주면 되는 거야!

이 정도로 저는 예제의 풀이의 근거를 계속해서 질문하면서 공부했었습니다.

혹시라도 개념공부를 이렇게 하지 않으셨다면, 이정도로 하기 귀찮았나 생각해보세요.
공부는 쉬운 것이 없습니다. 이해가 되는가 안 되는가의 문제입니다.
이해가 되지 않으면 충분히 토론하고 질문하고 생각해야합니다.
그것이 없는 공부는 공부라고 하기에도 민망한 것이에요.

5. 교과서와 기출의 연결

다음은 올해 수능 30번 문제입니다.

30. 최고차항의 계수가 6π인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

함수 $g(x)=\dfrac{1}{2+\sin(f(x))}$이 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소이고, $\alpha\ge 0$인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, $\cdots$ 라 할 때, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\alpha_1=0$이고 $g(\alpha_1)=\dfrac{2}{5}$이다.
(나) $\dfrac{1}{g(\alpha_5)}=\dfrac{1}{g(\alpha_2)}+\dfrac{1}{2}$

$g'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=a\pi$라 할 때, a^2의 값을 구하시오.

(단, $0<f(0)<\dfrac{\pi}{2}$) [4점]

문제를 보고, 평가원의 출제 근거와 대조해봅시다.14)

30	삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다. 합성함수를 미분할 수 있다. 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

(출처 : 한국 교육과정 평가원 사이트 http://www.suneung.re.kr)
이게 말이 됩니까?
무슨 삼각함수와 합성함수 미분, 함수의 그래프의 개형만으로 이 문제를 풀 수 있다고요?

하지만, 이것이 실제 수능출제의 방향이었다면, 우리는 한번쯤은 생각해볼 필요가 있습니다.
도대체 어떻게 이 출제근거를 통해 답을 모범적으로 도출해낼 수 있는지를 말입니다.
평가원의 출제 근거를 다음과 같이 분류하고 문제 풀이에 표시하겠습니다.
① 삼각함수의 활용
② 합성함수의 미분
③ 함수의 그래프의 개형 그리기

해설 :

먼저 ②합성함수의 미분을 통해, $g'(x)=\dfrac{-f'(x)\cos(f(x))}{(2+\sin(f(x))^2}$인 것은 자명합니다.

극값을 가질 때는, $f'(x)=0$ 혹은 $\cos(f(x))=0$이면서 좌우의 부호가 바뀔 때입니다.

①$\cos(f(x))=0$이 성립할 때를 조사해보면, $f(x)=-\dfrac{3\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2},\ldots$일 때 극값이 될

14) 이 출제 근거.. 사실 말이 많은 것으로 알고 있습니다. 하지만, 평가원이 실제로 교과서의 학습목표를 염두에 두고 문제를 출제한다는 것만은 확실합니다. 그 때문에, 모범답안 또한 이 학습목표에 근거한 풀이가 되리라는 것은 충분히 생각 가능합니다.

수 있을 것 같습니다. $\alpha_1=0$ 이므로, $f'(0)=0$입니다.
★ 삼차 식을 미분하면 이차식이며, 이차방정식의 근의 개수는 2개입니다.
즉 α_1 다음으로 $f'(x)=0$을 성립하게 하는 α_n은 하나입니다. 15), 16)

$g(\alpha_1)=\dfrac{1}{2+\sin(f(\alpha_1))}=\dfrac{2}{5}$ $2+\sin(f(\alpha_1))=\dfrac{5}{2}$, $\sin(f(\alpha_1))=\dfrac{1}{2}$이며,

$f(0)=\dfrac{\pi}{6}$ 입니다. ($0<f(0)<\dfrac{\pi}{2}$)

$\dfrac{1}{g(\alpha_5)}=\dfrac{1}{g(\alpha_2)}+\dfrac{1}{2}=2+\sin(f(\alpha_5))=2+\sin(f(\alpha_2))+\dfrac{1}{2}$ 이므로

$\sin(f(\alpha_5))=\sin(f(\alpha_2))+\dfrac{1}{2}$ 인데,

①$\cos(f(\alpha_n))=0$ 이 될 때 $\sin(f(\alpha_n))=1\,\mathrm{or}-1$ 일 수 밖에 없습니다.
즉, $\sin(f(\alpha_2))=1\,\mathrm{or}-1$ 이거나, $\sin(f(\alpha_5))=1\,\mathrm{or}-1$ 일 수 밖에 없는 것입니다.
①사인 함수의 특징은, 함숫값이 -1이상, 1 이하의 범위에 있다는 것입니다.
즉, $\sin(f(\alpha_2))=-1$ 혹은, $\sin(f(\alpha_5))=1$ 일 수 밖에 없습니다.

★이때 전자는 $\sin(f(\alpha_5))=-\dfrac{1}{2}$, 후자는 $\sin(f(\alpha_2))=\dfrac{1}{2}$를 값으로 가지며

α_2와 α_5는 $\cos(f(\alpha_n))=0$의 근이 아니므로 $f'(x)=0$의 근 일거라고 유추하시면 됩니다.
즉, $f'(x)=0$은 서로 다른 두 근을 갖게 되는 것이 참입니다.17)

③ 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$이며, α_1은 어떤 α_n보다 작은 값이므로, α_1은 삼차함수의 극대가 되는 x값입니다. α_p를 극소로 생각하면, $f(0)>f(\alpha_p)$이며, α_p까지 $f(x)$는 감소합니다.

$\sin(f(\alpha_2))=\dfrac{1}{2}$, $\sin(f(\alpha_5))=1$ 일 때는 모순입니다. $f(0)=\dfrac{\pi}{6}$이므로, $f(\alpha_2)<\dfrac{\pi}{6}$입니다. 즉, $f(\alpha_2)=-\pi-\dfrac{\pi}{6}$이 되는데, 그 사이에 $\cos(f(x))=0$이 되게 하는 값인

$f(\alpha_n)=-\dfrac{\pi}{2}$가 포함됩니다.

---

15) 혹은 중근입니다만, 중근이면 α_1로 쓸 수 없습니다. 극값이 아니게 되니까요.. $\cos(f(x))=0$을 α_1이 만족하게 할 수는 없습니다. 문제에서 이걸 발견하지 못했다면, 중근인지 아닌지를 구별해줘야 합니다.
16) 이 내용은 대수학의 기본정리에 따른 것이며, 교육과정에 이 내용을 조금이라도 포함해서 학생들에게 전달해주어야 한다고 저는 생각합니다.
17) 15번 각주의 내용으로 보면, 애초에 중근 가능성 없습니다. 하지만, 발견 못하셨으면 이렇게 해석하셔야합니다.

극대부터 극소까지 감소한다고 했습니다. **감소상태는, x값이 증가할 때 y값이 감소하는 것**을 말하며, $f(\alpha_1) > f(\alpha_n) > f(\alpha_2)$ 이므로 $\alpha_1 < \alpha_n < \alpha_2$[18]여야 합니다. 이걸 만족하는 n은 없습니다.

$\sin(f(\alpha_2)) = -1$, $\sin(f(\alpha_5)) = -\dfrac{1}{2}$ 일 때, α_1과 α_5가 $f'(x) = 0$의 두 근입니다.

그 사이의 α_2, α_3, α_4는 모두 $\cos(f(\alpha_n)) = 0$의 해로 생각하면 됩니다. 즉, $f(0) = \dfrac{\pi}{6}$ 을 시작으로 계속 함숫값이 작아지면 됩니다.

①$f(\alpha_2) = -\dfrac{\pi}{2}$, $f(\alpha_3) = -\dfrac{3\pi}{2}$, $f(\alpha_4) = -\dfrac{5\pi}{2}$

그리고 $\sin(f(\alpha_5)) = -\dfrac{1}{2}$ 이므로, $f(\alpha_5) = -3\pi + \dfrac{\pi}{6}$

이제 $f'(x) = 0$의 두 근을 알고, $f(0) = \dfrac{\pi}{6}$ 을 알기 때문에, 우리는 $f(x)$를 구할 수 있습니다.
그 후, $g'(x)$또한 구할 수 있을 것입니다. 계산은 생략하겠습니다.

저걸 보고서 X됐다 생각 안하는 사람 없을 것입니다.
처음 저도 저걸 보고 이게 뭔 소리지 싶었습니다.
그냥 한눈에 보고 풀이과정을 눈에 보일 듯이 그리는 것? 그건 저는 못해요.
그리고 여러분도 거의 못할 거에요.

중요한 건, $g'(x)$를 구해서 어떨 때 극값이 발생하는지 파악하는 것. (합성함수의 미분)
정확한 $f(x)$를 모르므로, $f'(x)$를 조사하기 이전에[19] $\cos(f(x)) = 0$을 조사하여 극값이 되는 $f(x)$값을 파악하는 것. (삼각함수와 그래프 그리기)
α_1이 삼차함수의 극댓값인 것을 파악하고 (가)와 (나)의 식을 조사하여, 삼차함수의 다른 극값을 확정하는 것. (삼각함수의 활용, 증가, 감소, 그래프 그리기)
까지만 한다면 이 문제는 그냥 계산문제인 것입니다.

진심으로 말씀드립니다. 개념은 올바른 문제풀이 과정의 아이디어를 줍니다.
문제 풀이 과정은 아이디어-개념-정확한 계산입니다. 이 모든 과정에 개념이 들어간다구요.[20]

---

18) 크기가 작은 순서대로 α를 나열한다는 것을 잊으시면 문제를 맞히실 자격 없습니다. 문제의 조건은 기본중의 기본입니다.
19) 순서 잘 생각해야 합니다. 구할 수 없는 것과 구할 수 있는 것을 시험장에서 당연히 구별해야합니다.
20) 개념을 왜 쓰는지, 어디에 쓸 수 있는지 알아야 아이디어를 떠올리고 개념을 정확하게 적용할 수 있습니다.
그리고 개념을 익숙하게 쓰는 연습을 해야 정확한 계산이 나옵니다.

맺음말

저는 왜 이러한 교과서 개념을 알리는 데에 집중했을까요?
실제로 인강과 학원을 적절한 고민 없이 그저 따라 듣는 학생들이 많았기 때문입니다.
또한, 본인이 무엇이 부족한지 모르고 개념 공부를 그저 암기로 여기는 학생들이 있기 때문입니다.

제가 단언할 수 있는 것은, 기본으로 돌아가서 계속 토론하는 공부는 반드시 늘 수밖에 없습니다.
그리고 오히려 공부에서 중요한 것은 기본으로 돌아가서 끈질기게 의문을 해결하는 것입니다.
많은 것이 필요한 것이 아니라는 점을 말씀드리고 싶었습니다.

그 증거로 저는 이렇게 여러분들 앞에서 칼럼을 쓰고 있습니다.
제가 만약 이 방법으로 성공하지 못했다면 이 칼럼 또한 없었을 것입니다.

그 끈기가 중요한 것이지, 여러분이 돈이나 재능이 부족하다고 해서 불가능한 것이 아니란 거에요.

지금까지 많은 칼럼을 올렸습니다만, 꽤 완성도 있는 교과서 공부법에 대해 적은 건 처음입니다.
그리고, 아마도 이러한 칼럼을 다시 올릴 수는 없을 것입니다.

이 칼럼이 교과서의 개념을 학습하는데에 충분한 도움이 되기를 진심으로 바랍니다.

2018년 12월 8일
일반청의미 이원엽

(칼럼의그림의 출처는 명시되어 있습니다. 이 칼럼은 이원엽이 비영리적 용도로 작성하였습니다.)