E.T's Eight Technics.

Ver. 2019

Six Technic.

이 차 곡 선

첫째는 정의 , 둘째는 도형의 성질

이차곡선은 어딜 봐도 정의로워 보인다.

－ E . T －

이차곡선
레시피

1. 포물선

2. 쌍곡선

3. 타원

- E . T -

1. 포물선

Question. 01

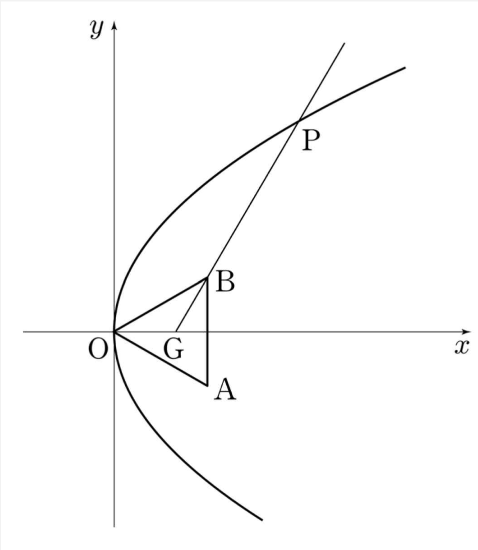
두 양수 m, p에 대하여 포물선 $y^2=4px$와 직선 $y=m(x-4)$가 만나는 두 점 중 제1사분면 위의 점을 A, 포물선의 준선과 x축이 만나는 점을 B, 직선 $y=m(x-4)$와 y축이 만나는 점을 C라 하자. 삼각형 ABC의 무게중심이 포물선의 초점 F와 일치할 때, $\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BF}}$의 값을 구하시오.

[4점] [2016년 7월 교육청]

Question. 02 (Question. 01 유제)

그림과 같이 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형 OAB의 무게중심 G가 x축 위에 있다.
꼭짓점이 O이고 초점이 G인 포물선과 직선 GB가 제 1사분면에서 만나는 점을 P라 할 때,
선분 GP의 길이를 구하시오. (단, O는 원점이다.)

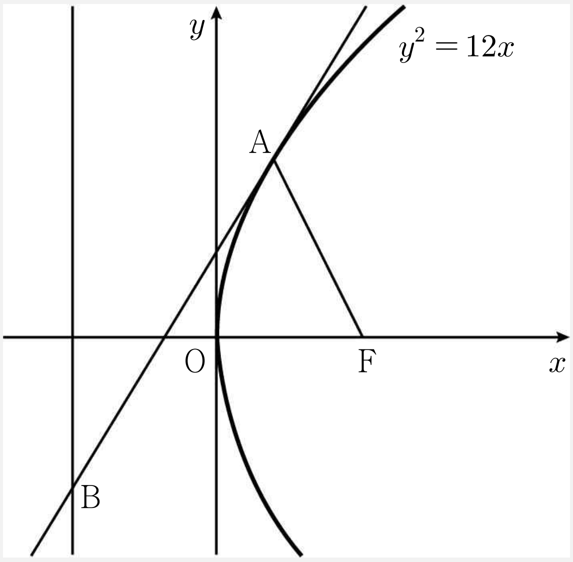
[4점][2011년 6월 평가원]



Question. 03

그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2=12x$가 있다. 포물선 위에 있고 제1사분면에 있는 점 A에서의 접선과 포물선의 준선이 만나는 점을 B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AF}}$일 때, $\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AF}}$의 값을 구하시오.

[4점] [2017년 7월 교육청]



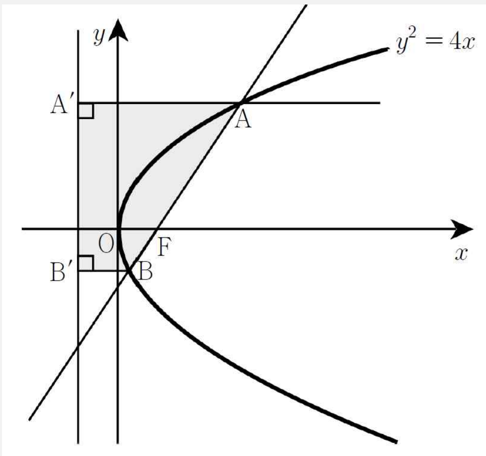
Question. 04 (Question. 03 유제)

그림과 같이 좌표평면에서 포물선 $y^2=4x$의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 A$'$, B$'$이라 하자.

$\overline{\mathrm{AF}}:\overline{\mathrm{BF}}=3:1$일 때 사각형 AA$'B'$B의 넓이가 $\dfrac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점][2014년 8월 교육청]



Question. 05

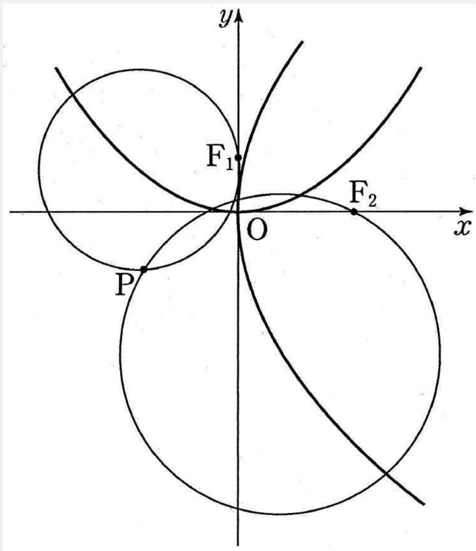
좌표평면에서 포물선 $C_1 : x^2 = 4y$ 의 초점을 F_1 , 포물선 $C_2 : y^2 = 8x$ 의 초점을 F_2 라 하자.

점 P 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 중심이 C_1 위에 있고 점 F_1 을 지나는 원과 중심이 C_2 위에 있고 점 F_2 를 지나는 원의 교점이다.

(나) 제 3 사분면에 있는 점이다.

원점 O 에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}^2$ 의 최댓값을 구하시오. [4점][2014년 6월 평가원]

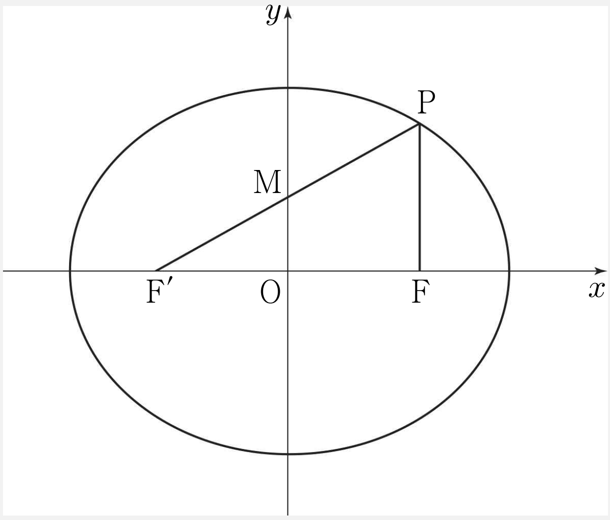


2. 타원

Question. 06

그림과 같이 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F, 음수인 점을 F$'$이라 하자. 타원 위의 점 P에 대하여 선분 PF$'$의 중점 M의 좌표가 $(0, 1)$이고 $\overline{\mathrm{PM}}=\overline{\mathrm{PF}}$일 때, a^2+b^2의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

[4점] [2017년 4월 교육청]



① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

Question. 07

닫힌 구간 $[-2, 2]$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (-2 \leq x \leq 0) \\ -x+2 & (0 < x \leq 2) \end{cases}$$

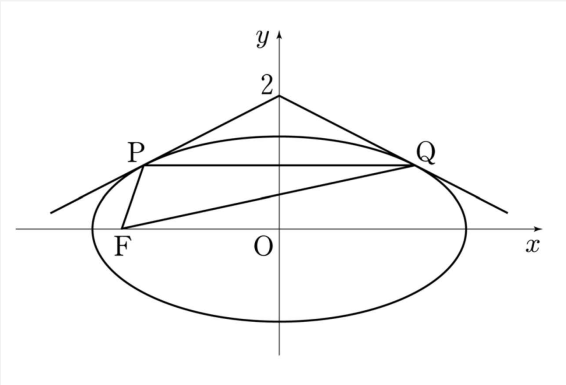
이다. 좌표평면에서 $k>1$인 실수 k에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 타원 $\dfrac{x^2}{k^2}+y^2=1$이 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(k)$라 하자. 함수 $g(k)$가 불연속이 되는 모든 k의 값들의 제곱의 합은?

[4점] [2016년 4월 교육청]

① 6 ② $\dfrac{25}{4}$ ③ $\dfrac{13}{2}$ ④ $\dfrac{27}{4}$ ⑤ 7

Question. 08 (Question. 07 유제)

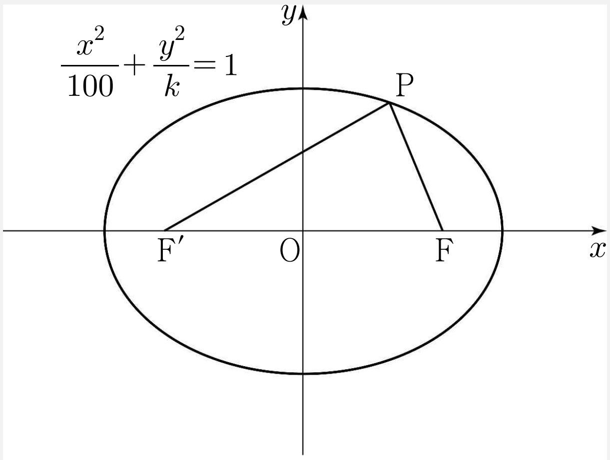
점 (0, 2)에서 타원 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q라 하고, 타원의 두 초점 중 하나를 F라 할 때, 삼각형 PFQ의 둘레의 길이는 $a\sqrt{2}+b$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오.
(단, a, b는 유리수이다.) [4점][2011년 6월 평가원]



Question. 09

그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{k}=1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P와 두 초점 F, F$'$에 대하여 삼각형 PF$'$F의 둘레의 길이가 34일 때, 상수 k의 값은? (단, $0<k<100$)

[4점] [2017년 4월 교육청]

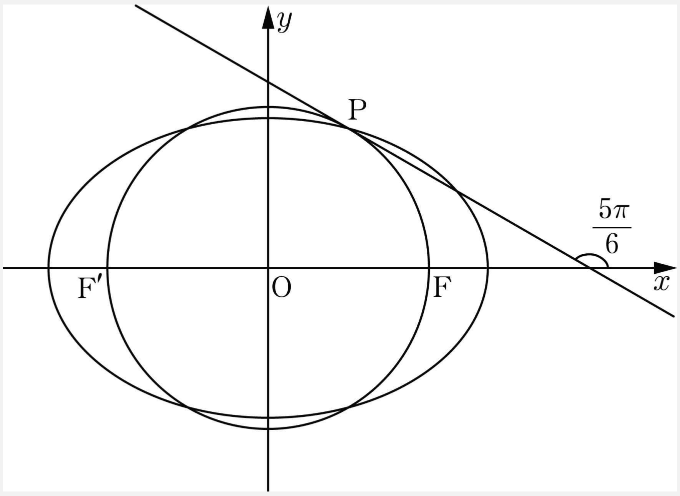


① 36 ② 41 ③ 46 ④ 51 ⑤ 56

Question. 10

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점 $\mathrm{F}(6,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-6,\ 0)$에 대하여 선분 $\mathrm{F'F}$를 지름으로 하는 원이 있다. 타원과 원의 교점 중 제1사분면에 있는 점을 P라 하자. 원 위의 점 P에서의 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\frac{5\pi}{6}$일 때, 타원의 장축의 길이는? (단, a, b는 $0<\sqrt{2}b<a$인 상수이다.)

[4점] [2016년 10월 교육청]



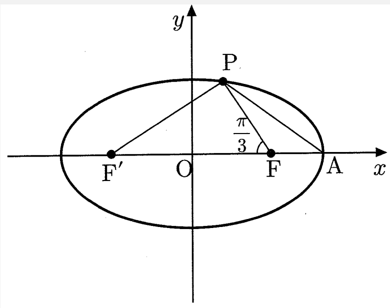
① $5+6\sqrt{3}$　② $6+6\sqrt{3}$　③ $7+6\sqrt{3}$　④ $6+7\sqrt{3}$　⑤ $7+7\sqrt{3}$

Question. 11 (Question. 10 유제)

타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$의 두 초점을 F와 F′이라 하고, 초점 F에 가장 가까운 꼭짓점을 A라 하자.

이 타원 위의 한 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{PFF'}=\frac{\pi}{3}$일 때, $\overline{\mathrm{PA}}^2$의 값을 구하시오.

[4점][2005년 수능]



3. 쌍곡선

Question. 12

좌표평면에서 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$이고 한 초점이 $\mathrm{F}(4\sqrt{3}, 0)$이다. 점 F를 지나고 x축에 수직인 직선이 이 쌍곡선과 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. 쌍곡선 위의 점 P에서의 접선의 기울기는? (단, a, b는 상수이다.)

[4점] [2017년 4월 교육청]

① $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

Question. 13 (Question. 12 유제)

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{8}=1$위의 점 $(a,\,b)$에서의 접선이 타원 $\dfrac{(x-2)^2}{4}+y^2=1$의 넓이를 이등분할 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. [4점][2011년 9월 평가원]

Question. 14

쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$의 두 초점 $(2\sqrt{3},\ 0)$, $(-2\sqrt{3},\ 0)$을 각각 F, F'이라 하자.

이 쌍곡선 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)\,(x>0)$에 대하여 선분$\mathrm{F}'\mathrm{P}$ 위의 점 Q가 $\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{PQ}}$를 만족시킬 때, 점 Q가 나타내는 도형 전체의 길이는?

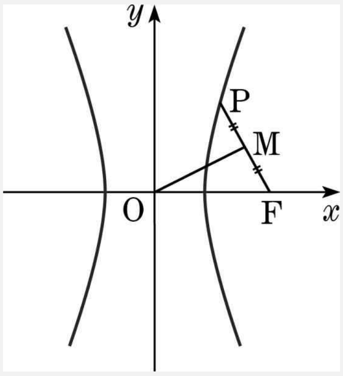
[4점][2006년 평가원]

① π ② $\sqrt{3}\pi$ ③ 2π ④ 3π ⑤ $2\sqrt{3}\pi$

Question. 15 (Question. 14 유제)

그림과 같이 한 초점이 F이고 점근선의 방정식이 $y=2x$, $y=-2x$인 쌍곡선이 있다.
제1사분면에 있는 쌍곡선 위의 점 P에 대하여 선분 PF의 중점을 M이라 하자.
$\overline{\mathrm{OM}}=6$, $\overline{\mathrm{MF}}=3$일 때, 선분 OF의 길이는? (단, O는 원점이다.)

[4점] [2013년 10월 교육청]



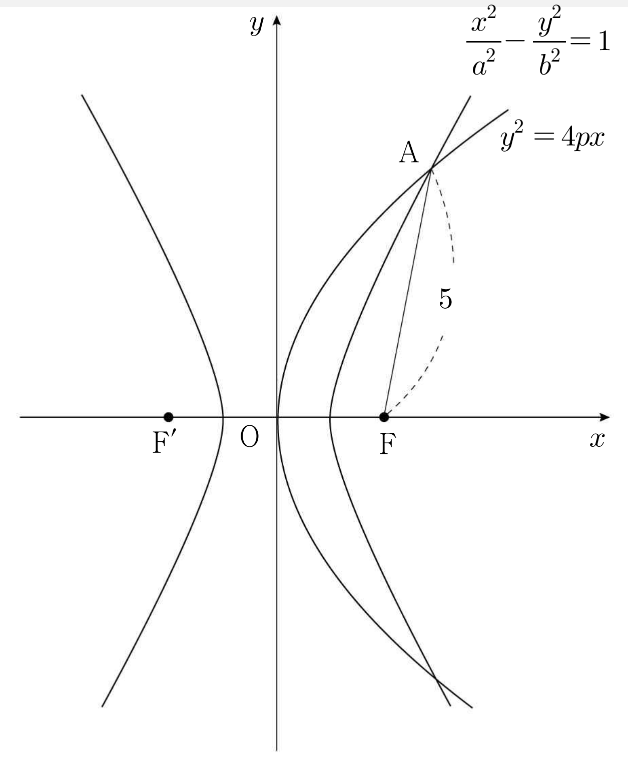
① $2\sqrt{10}$ ② $3\sqrt{5}$ ③ $5\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{55}$ ⑤ $2\sqrt{15}$

Question. 16

그림과 같이 $\mathrm{F}(p,\ 0)$을 초점으로 하는 포물선 $y^2 = 4px$와 $\mathrm{F}(p,\ 0)$과 $\mathrm{F}'(-p,\ 0)$을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,(a>0,\ b>0)$이 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하자.

$\overline{\mathrm{AF}} = 5,\ \cos(\angle \mathrm{AFF}') = -\frac{1}{5}$일 때, ab의 값은?

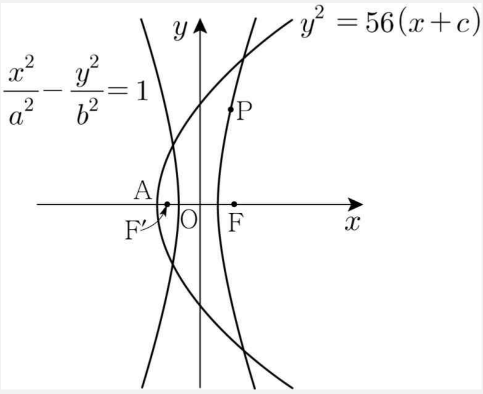
[4점] [2012년 7월 인천교육청]



① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ 3

Question. 17 (Question. 16 유제)

그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(k, 0)$, $\mathrm{F}'(-k, 0)$을 초점으로 하는 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 과 점 F 를 초점으로 하는 포물선 $y^2=56(x+c)$ 가 있다.



쌍곡선 위의 임의의 점 P 에 대하여 $|\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}|=10$ 이 성립하고, 포물선의 꼭짓점 A 에 대하여 $\overline{\mathrm{AF'}} : \overline{\mathrm{FF'}} = 1 : 6$ 이 성립한다. 이때, $\dfrac{c^2}{a^2-b^2}$ 의 값은? (단, $0<k<c$ 이다.)

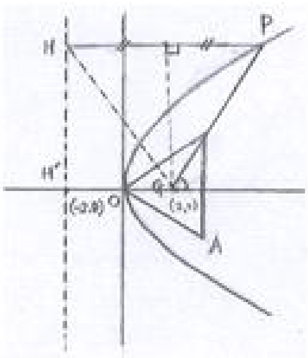
[4점][2009년 교육청]

① $\dfrac{53}{14}$ ② $\dfrac{55}{14}$ ③ $\dfrac{30}{7}$ ④ $\dfrac{32}{7}$ ⑤ $\dfrac{34}{7}$

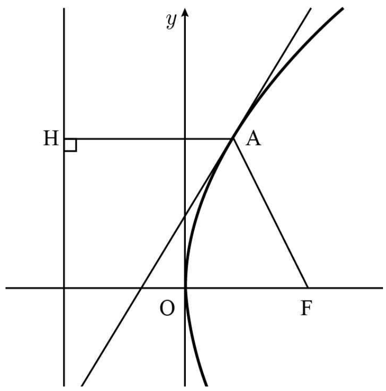
[Six Technic. 이차곡선 정답 및 해설]

1) [출제의도] 포물선의 성질 이해하기
포물선의 초점을 $\mathrm{F}(p,\ 0)$, 점 $\mathrm{A}(\alpha,\ m(\alpha-4))$ $(\alpha>0)$라 하면, 점 $\mathrm{B}(-p,\ 0)$, 점 $\mathrm{C}(0,\ -4m)$ 이다.
삼각형 ABC의 무게중심이 점 F이므로
$\left(\dfrac{\alpha-p}{3},\ \dfrac{m\alpha-4m-4m}{3}\right)$에서
$\dfrac{\alpha-p}{3}=p,\ \dfrac{m\alpha-4m-4m}{3}=0$
$\alpha=4p,\ (\alpha-8)m=0$
$m>0$이므로 $\alpha=8,\ p=2$
점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 A′라 하면, 포물선의 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AA'}}=10$
따라서 $\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BF}}=14$

2) 정답 8
삼각형의 높이는 3이므로
$\overline{OG}=2$ 준선의 방정식은 $x=-2$
P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{GP}$와 x축이 이루는 각이 60°이므로 $\angle HPG=60^\circ$
$\overline{PH}=\overline{PG}$이므로 삼각형 APH는 정삼각형이다
준선과 x축이 만나는 점을 H'이라 하면 초점과 준선 간의 거리 $\overline{GH'}=4$
$\overline{GP}=\overline{PH}=2\times\overline{GH'}=2\times4=8$

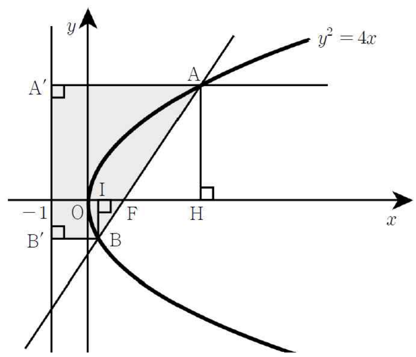


3) [출제의도] 포물선의 정의를 활용하여 문제해결하기



점 A의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$, 점 A에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하자.
$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AF}}$, $\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AH}}$이므로 $\overline{\mathrm{AH}}:\overline{\mathrm{AB}}=1:2$
점 A에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{\overline{\mathrm{BH}}}{\overline{\mathrm{AH}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$
$y^2=12x$에서 $2y\dfrac{dy}{dx}=12$
$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{6}{y}$이므로 $\dfrac{6}{y_1}=\sqrt{3}$
그러므로 $\mathrm{A}(1,\ 2\sqrt{3})$이다.
$\overline{\mathrm{AF}}=x_1+3=4$, $\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AF}}=8$
따라서 $\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AF}}=32$

4) 정답 73
[출제의도] 포물선의 성질을 활용하여 문제해결하기
두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하고, 그 x좌표를 각각 α, β라 하자.



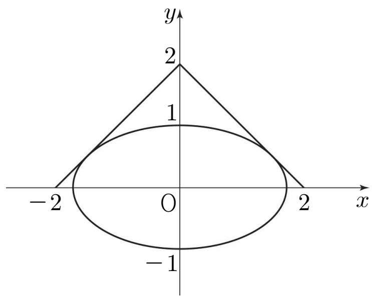
포물선 $y^2=4x$의 초점은 $\mathrm{F}(1,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-1$이다.
$\overline{\mathrm{AF}}:\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{AA'}}:\overline{\mathrm{BB'}}$, $3:1=\alpha+1:\beta+1$
$\alpha+1=3\beta+3$, $\alpha-3\beta=2$ ⋯ ①
$\overline{\mathrm{AF}}:\overline{\mathrm{BF}}=3:1$이므로 $\overline{\mathrm{FH}}:\overline{\mathrm{FI}}=3:1$
$\alpha-1:1-\beta=3:1$, $\alpha-1=3-3\beta$
$\alpha+3\beta=4$ ⋯ ②
①, ②에서 $\alpha=3,\ \beta=\dfrac{1}{3}$
$\mathrm{A}(3,\ 2\sqrt{3})$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$이므로
사각형 AA′B′B의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\left(4\times\dfrac{4}{3}\right)\times\dfrac{8}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{16}{3}\times\dfrac{8}{3}\sqrt{3}=\dfrac{64}{9}\sqrt{3}$
$\therefore\ p+q=73$

5) 정답 5
중심이 C_1위에 있고 점 F_1을 지나는 원을 k_1이라 하고
포물선 $x^2=4y$위의 원 k_1의 중심을 Q_1이라 하면
포물선의 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{Q_1F_1}}=k_1$의 반지름 $=$ ($\mathrm{Q_1}$으로부터 준선 $y=-1$에 이르는 거리)

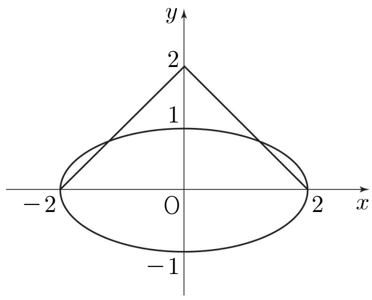
이므로 원 k_1은 준선 $y=-1$에 접한다.
따라서 원 k_1위의 점 P 의 y 좌표≥ -1이다.
같은 방법으로
중심이 C_2 위에 있고 점 F_2 를 지나는 원을 k_2 라 하고
포물선 $y^2=8x$위의 원k_2의 중심을 Q_2라 하면 포물선의 정의에
의하여
$\overline{Q_2F_2}=k_2$ 의 반지름$=$(Q_2 로부터 준선 $x=-2$ 까지의 거리)
이므로 원 k_2 는 준선 $x=-2$ 에 접한다.
따라서 원 k_2 위의 점 P 의 x 좌표 ≥ -2 이다.
따라서 두 원 k_1, k_2 의 교점 P 는
x 좌표 ≥ -2, y좌표 ≥ -1 이므로
(나) 조건에 의하여 3사분면에서 $\overline{OP}$ 가 최대일 때는 P 가
$(-2,\ -1)$에 있을 때이다.
$P(-2,\ -1)$ 을 지나고 준선에 접하는 두 원이
$(x+2)^2+(y-1)^2=4$과
$\left(x-\dfrac{1}{8}\right)^2+(y+1)^2=\left(\dfrac{17}{8}\right)^2$로 존재하므로
$P(-2,\ -1)$ 은 조건을 만족한다.
따라서 $\overline{OP}$ 의 최댓값은 $\sqrt{5}$ 이고 $\overline{OP}^2$ 의 최댓값은 5 이다.

6) [출제의도] 타원의 정의 이해하기
타원의 정의에 의하여 $\overline{PF}+\overline{PF'}=20$
$F(c,0)\,(c>0)$이라 하면 $c^2=100-k$이므로
$\overline{F'F}=2\sqrt{100-k}$
삼각형 $PF'F$의 둘레의 길이는
$\overline{PF}+\overline{PF'}+\overline{F'F}=20+2\sqrt{100-k}=34$
$\sqrt{100-k}=7$
따라서 $k=51$

7) [출제의도] 평면곡선의 접선의 성질 추론하기
타원 $\dfrac{x^2}{k^2}+y^2=1$은 네 점 $(k,0)$, $(-k,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$을 네 꼭짓점으로 하는 타원이다.
타원 $\dfrac{x^2}{k^2}+y^2=1$과 함수 $y=f(x)$의 그래프가 접할 때 k의 값을 구하자.
$\dfrac{x^2}{k^2}+y^2=1$ 위의 점 $(x_1,y_1)\,(x_1>0)$에서의 접선의 방정식을 구하면
$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{k^2y}$ 이므로 접선의 기울기는 $-\dfrac{x_1}{k^2y_1}$ 이고
접선의 방정식은 $y-y_1=-\dfrac{x_1}{k^2y_1}(x-x_1)\,(y_1\neq 0)$
$\therefore\ y=-\dfrac{x_1}{k^2y_1}x+\dfrac{1}{y_1}$
타원이 직선 $y=-x+2$에 접하므로
$\dfrac{x_1}{k^2y_1}=1$, $\dfrac{1}{y_1}=2$ $\therefore\ x_1=\dfrac{k^2}{2}$, $y_1=\dfrac{1}{2}$
점 (x_1,y_1)은 $y=-x+2$ 위의 점이므로
$k^2=3$ $\therefore\ k=\sqrt{3}$



타원 $\dfrac{x^2}{k^2}+y^2=1$이 점 $(2,0)$을 지날 때, $k=2$



$$\therefore\ g(k)=\begin{cases}0 & (1<k<\sqrt{3})\\ 2 & (k=\sqrt{3})\\ 4 & (\sqrt{3}<k\leq 2)\\ 2 & (k>2)\end{cases}$$

따라서 함수 $g(k)$는 $k=\sqrt{3}$, $k=2$에서 불연속이고, 불연속이 되는 모든 k의 값들의 제곱의 합은
$(\sqrt{3})^2+2^2=7$

8) 정답 32
접점의 좌표를 (x_1,y_1)이라 하면 접선의 방정식은
$\dfrac{x_1x}{8}+\dfrac{y_1y}{2}=1$이고
이 직선이 점 (0,2)를 지나므로
$\dfrac{2y_1}{2}=1$에서 $y_1=1$
타원과 $y=1$을 연립시키면

$x = \pm 2$

$P(-2, 1)$, $Q(2, 1)$

$\therefore \overline{PQ}$의 길이는 4

타원의 다른 초점을 F'이라 하면

$\overline{FQ} = \overline{PF'}$에서

$\overline{PF} + \overline{FQ} = \overline{PF} + \overline{PF'} = 4\sqrt{2}$

구하는 길이는 $4\sqrt{2} + 4$

$a^2 + b^2 = 32$

9) [출제의도] 타원의 정의 이해하기

타원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{PF'}} = 20$

$\mathrm{F}(c, 0)\,(c > 0)$이라 하면 $c^2 = 100 - k$이므로

$\overline{\mathrm{F'F}} = 2\sqrt{100-k}$

삼각형 $\mathrm{PF'F}$의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{PF'}} + \overline{\mathrm{F'F}} = 20 + 2\sqrt{100-k} = 34$

$\sqrt{100-k} = 7$

따라서 $k = 51$

10) [출제의도] 타원의 성질을 이용하여 타원의 장축의 길이를 구하는 문제를 해결한다.

접선이 x축과 만나는 점을 A라 하면 $\angle \mathrm{OAP} = \dfrac{\pi}{6}$

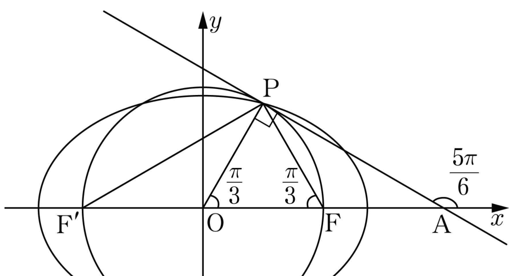
이고, 직선 OP는 접선과 수직이므로 $\angle \mathrm{POF} = \dfrac{\pi}{3}$

삼각형 POF는 정삼각형이므로

$\angle \mathrm{PFO} = \dfrac{\pi}{3}$, $\overline{\mathrm{PF}} = 6$

선분 $\mathrm{F'F}$는 지름이므로 직각삼각형 $\mathrm{FPF'}$에서

$\overline{\mathrm{PF'}} = \overline{\mathrm{PF}} \times \tan\dfrac{\pi}{3} = 6\sqrt{3}$



따라서 두 점 F, F'은 타원의 초점이므로 타원의 정의에 의해 장축의 길이는 $\overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{PF'}} = 6 + 6\sqrt{3}$

11) 정답 39

P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{PF}}' = 12$

$\overline{\mathrm{PF}} = x$라 하면 $\overline{\mathrm{PF}}' = 12 - x$이다.

$\triangle \mathrm{PFF}'$에서 제이코사인법칙을 이용하면

$x^2 + 8^2 - 2 \cdot x \cdot 8 \cdot \cos\dfrac{\pi}{3} = (12 - x)^2$

$\therefore\ x = 5$

$\triangle \mathrm{PAF}$에서 제이코사인법칙을 이용하면

$\overline{\mathrm{PA}}^2 = 5^2 + 2^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2\cos\dfrac{2}{3}\pi\ = 39$

12) [출제의도] 평면곡선을 활용하여 문제해결하기

점근선의 방정식이 $y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$이므로 $a^2 = 3b^2$

초점 F의 x좌표가 $4\sqrt{3}$이므로

$a^2 + b^2 = 4b^2 = (4\sqrt{3})^2$

$\therefore a^2 = 36,\ b^2 = 12$

점 P는 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{12} = 1$ 위의 점이므로

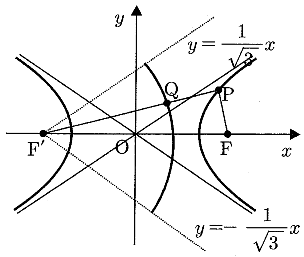
$\mathrm{P}(4\sqrt{3}, 2)$

$\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{12} = 1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{2x}{36} - \dfrac{2y}{12} \times \dfrac{dy}{dx} = 0$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{3y}\,(y \neq 0)$

따라서 점 P에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$



13) 정답 52

[출제의도] 쌍곡선의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{12} - \dfrac{y^2}{8} = 1$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 방정식은

$\dfrac{ax}{12} - \dfrac{by}{8} = 1$

이고, 접선이 타원 $\dfrac{(x-2)^2}{4} + y^2 = 1$의 넓이를 이등분하므로 접선은 타원의 중심 $(2, 0)$을 지난다.

따라서, $\dfrac{2a}{12} - 0 = 1$에서 $a = 6$

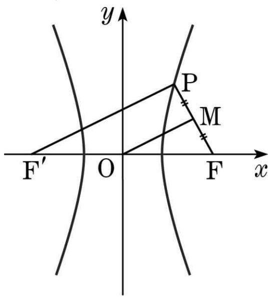
또한, $\dfrac{a^2}{12} - \dfrac{b^2}{8} = 1$이므로

$\dfrac{36}{12} - \dfrac{b^2}{8} = 1$에서 $\dfrac{b^2}{8} = 2$, $b^2 = 16$

$\therefore\ a^2+b^2=36+16=52$

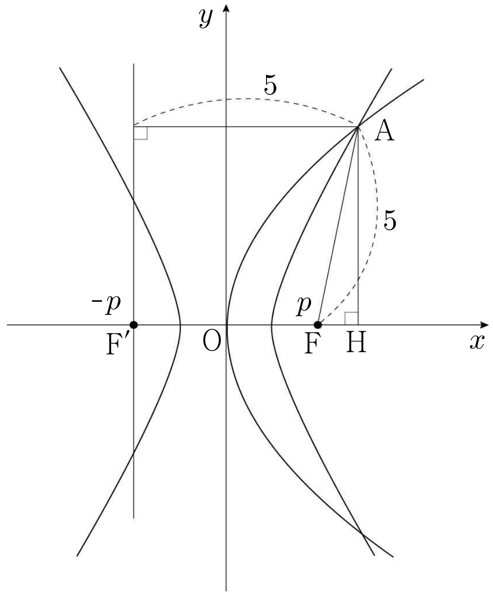
14) 정답 ③
쌍곡선의 정의에 의해 $\mathrm{PF'}-\mathrm{PF}=2\times3$
조건에서 $\mathrm{PF}=\mathrm{PQ}$이므로
$\mathrm{PF'}-\mathrm{PQ}=6$즉 $\mathrm{F'Q}=6$
따라서, 점 Q의 자취는 반지름 6, 중심각 은 점근선의 방정식이 $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$이므로 점근선이 이루는 각은 $2\times\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$이므로 점 Q의 자취는 반지름 6인 부채꼴의 호 위를 움직이므로 자취의 길이는 호의 길이
$6\times\dfrac{\pi}{3}=2\pi$

15) 정답 ②
[출제의도] 쌍곡선의 정의를 이해하고 선분의 길이를 구한다.



쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,\ b>0)$이라 하면 점근선의 방정식이 $y=2x,\ y=-2x$이므로
$\dfrac{b}{a}=2,\ b=2a$
쌍곡선의 또 다른 초점을 점 F′이라 하면 삼각형 PF′F에서 점 O는 변 F′F의 중점이고 점 M은 변 PF의 중점이므로
$\overline{\mathrm{PF'}}=2\overline{\mathrm{OM}}=12$
$\overline{\mathrm{PF}}=2\overline{\mathrm{MF}}=6$
$\left|\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}\right|=12-6=6=2a$
$\therefore\ a=3,\ b=2a=6$
$\therefore\ \overline{\mathrm{OF}}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+36}=3\sqrt{5}$

16) 정답 ②



점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면, $\cos(\angle\mathrm{AFH})=\dfrac{1}{5}$이므로 $\overline{\mathrm{FH}}=1$
포물선의 정의에 의하여
$2p+1=5\quad\therefore p=2$
$\mathrm{A}(3,\,2\sqrt{6}\,)$이므로
$\overline{\mathrm{AF}}'=7$
쌍곡선의 정의에 의하여 $\left|\overline{\mathrm{AF'}}-\overline{\mathrm{AF}}\right|=2a=2$
$a=1,\,b=\sqrt{3}$
$\therefore ab=\sqrt{3}$

17) 정답 ④
[출제의도] 이차곡선의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.
$|\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}|=10$이므로 $a=5$이다.
$y^2=4\times14(x+c)$ 이므로 $\overline{\mathrm{AF}}=14$이다.
$\overline{\mathrm{AF'}}:\overline{\mathrm{FF'}}=1:6$ 이므로 $\overline{\mathrm{AF'}}=2,\ \overline{\mathrm{FF'}}=12$ 이다.
$\dfrac{c^2}{a^2-b^2}=\dfrac{64}{25-11}=\dfrac{32}{7}$