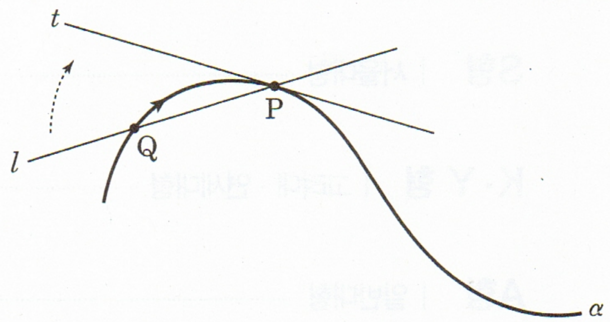
I. [1~2] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

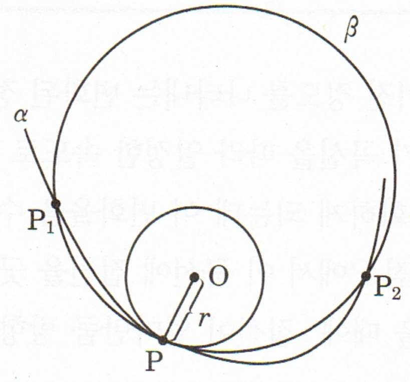
(가) 유클리드 평면에서 가장 매끄러운 1차원 도형은 직선과 원이다. 직선을 휘어지지 않고 "곧은" 것으로 생각할 때 직선에 어떤 곡률수치 $k$를 대응시킨다면 $k=0$으로 하는 것이 좋다. 한편, 원은 분명히 "휘어져" 있는데 그것이 얼마만큼 휘어져 있느냐 하는 것은 그의 반경에 달려 있다. 원의 반경이 커지면 커질수록 원은 직선에 가깝게 되고 그래서 덜 휘어질 것이므로 반경이 $r$인 원의 곡률 $k$를 $k=\frac{1}{r}$로 정의한다.

(나) 유클리드 평면 위의 한 매끄러운 곡선 $\alpha$를 살펴보자. "매끄러운 곡선"이라는 말은 곡선의 각 점에서의 접선이 연속적으로 존재한다는 뜻이다. 곡선 $\alpha$ 위의 점 P에서의 접선은 다음과 같이 정의할 수 있다. 점 P와 곡선 $\alpha$ 위의 또 다른 한 점 Q는 직선 $l$을 결정하는데 이때 점 P를 고정하고 점 Q를 점 P로 접근시키자. 그러면 점 Q가 점 P로 한없이 접근할 때 직선 $l$의 극한위치를 점 P에서의 곡선 $\alpha$의 접선(tangent line) $t$로 정의한다.



〈그림 1〉

한편 고정점 P 이외에 $\alpha$ 위의 또 다른 두 점 $P_1$, $P_2$를 생각해 보자. 이 세 점은 한 원 $\beta$를 결정하는데, 이때 점 P를 고정하고 점 $P_1$, $P_2$를 $\alpha$를 따라서 점 P로 접근시키자. 그러면 점 $P_1$, $P_2$가 점 P로 한없이 접근할 때 원 $\beta$의 극한위치는 점 P에서 곡선 $\alpha$에 "가장 잘 맞는" 원이 되는데 이 원을 점 P에서의 $\alpha$의 접촉원(osculating circle)이라 한다. (세 점 P, $P_1$, $P_2$가 아주 가까운 위치에 있으면 곡선 $\alpha$의 각 점에서의 법선이 접촉원의 중심을 지난다고 생각할 수 있다.) 따라서 점 P에서의 $\alpha$의 곡률을 점 P에서의 접촉원의 곡률, 즉 접촉원의 반경 $r$의 역수 $k=\frac{1}{r}$로 정의한다.




〈그림 2〉

〈논제 1〉

15점

(1) 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$을 매개 변수 $t$에 대하여 나타냈을 때, 곡선 위의 각 점에서의 곡률 $k(t)$를 구하시오. (단, 곡선 $Z(t)=(x(t),\ y(t))$의 곡률은 $k(t)=\frac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{\{(x'(t))^2+(y'(t))^2\}^{\frac{3}{2}}}$이다.)

(2) 이차곡선 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점에서의 곡률의 최댓값과 최솟값의 곱이 최소가 되기 위한 $a$, $b$의 조건을 구해 보시오. (단, $a$와 $b$는 $0<a\le 1$, $0<b\le 1$인 상수)

〈논제 2〉

15점

(1) 제시문 (나)의 평면 위의 한 곡선 $\alpha$가 $y=f(x)$로 주어졌을 때, $y=f(x)$ 위의 각 점에서의 곡률이

$$k(x)=\frac{|f''(x)|}{\{1+(f'(x))^2\}^{3/2}}$$

가 됨을 유도해 보시오.

(2) 다음 명제의 참 · 거짓을 말하고 그 이유에 대하여 서술하시오.

| |
|---|
| 다항함수 $y=f(x)$가 극값을 가질 때 그 점에서의 곡률이 최대가 된다. |