

2011년도 9월 고3 평가원 모의고사 정답 및 해설

수리 나형

수리'나'형 정답

1	④	2	③	3	④	4	⑤	5	②
6	③	7	①	8	④	9	④	10	②
11	⑤	12	③	13	①	14	③	15	②
16	⑤	17	②	18	①	19	①	20	②
21	⑤	22	10	23	39	24	13	25	35
26	12	27	30	28	19	29	16	30	392

해설

1. 정답: ④

출제의도: 로그의 계산

$$\log 12 + \log_2 \frac{4}{3} = \log_2 (12 \times \frac{4}{3}) = \log_2 2^4 = 4$$

2. 정답: ③

출제의도: 부정형 (∞ 꼴) 극한의 계산

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5}{2n^2 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{5}{n^2}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{3}{2}$$

3. 정답: ④

출제의도: 역행렬의 연산

행렬 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ 의 역행렬 A^{-1} 을 구하면

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \text{이다.}$$

따라서 $3A^{-1} = 3 \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ 이다.

행렬 $3A^{-1}$ 의 모든 성분의 합은 1이다.

4. 정답: ⑤

출제의도: 확률의 연산

두 사건 A, B 가 독립이므로 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ 을 만족한다.

조건에서 $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$ 이므로 $P(B) = x$ 라 하면

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2}x \text{이다.}$$

확률의 덧셈의 성질에 의하여

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{에서}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + x - \frac{1}{2}x$$

$$x = \frac{3}{5}$$

따라서 구하는 $P(A \cap B) = \frac{3}{10}$ 이다.

5. 정답: ②

출제의도: 수학상과 연계된 지수방정식의 풀이

방정식 $2^x + 2^{5-x} = 33$ 에서

$$2^x = t \ (t > 0) \text{라 하면}$$

$$t + \frac{32}{t} = 33 \text{이다. 양변에 } t \text{를 곱하여 정리하면}$$

$$t^2 - 33t + 32 = (t-1)(t-32) = 0 \text{이다.}$$

$$\therefore t = 1 \ \text{또는} \ t = 32$$

$$t = 2^x \text{에서 } 2^x = 1 \text{이므로 } x = 0$$

$$2^x = 32 = 2^5 \text{이므로 } x = 5$$

따라서 두 실근의 합을 구하면 5이다.

6. 정답: ③

출제의도: 확률분포표에서 평균 구하기

확률변수 X 의 확률분포표가 다음과 같으므로

	1	3	7	계
$P(X=x)$	a	$\frac{1}{4}$	b	1

i) 확률의 총합이 1이므로

$$a + b = \frac{3}{4} \text{이다. } \therefore a = \frac{3}{4} - b \text{ --- ㉞}$$

ii) $E(X) = 5$ 에서

$$a + \frac{3}{4} + 7b = 5 \text{ --- ㉟이다.}$$

㉞을 ㉟에 대입하면

$$\frac{3}{4} - b + \frac{3}{4} + 7b = 5 \text{에서 } b = \frac{7}{12} \text{이다.}$$

7. 정답: ①

출제의도: 로그함수의 실생활 응용문제

한 메뉴안에 선택할수 있는 항목이 n 개 있는 경우, 항목을 1개 선택하는 데 걸리는 시간 T (초)가 다음을 만족한다.

$$T = 2 + \frac{1}{3} \log_2(n+1)$$

따라서 메뉴가 10개이고 각 메뉴 안에 항목이 n 개씩 있을 때 걸리는 시간은

$$T = 10 \left(2 + \frac{1}{3} \log_2(n+1) \right) \leq 30 \text{이다.}$$

정리하면 $1 \log(n+1) \leq 1$

$$\begin{aligned} n+1 &\leq 8 \\ n &\leq 7 \end{aligned}$$

따라서 n 의 최대값은 7이다.

8. 정답: ④

출제의도: 등비수열의 합

등비수열의 합 $n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ 이므로

$$S_4 = \frac{a(r^4 - 1)}{r - 1} = r^2 + 1 = 9 \quad \therefore r^2 = 8$$

$$S_2 = \frac{a(r^2 - 1)}{r - 1}$$

$$\therefore \frac{a_4}{a_2} = \frac{ar^3}{ar} = r^2 = 8$$

9. 정답: ④

출제의도: 무한등비급수와 도형

R_1 에 포함된 원의 반지름은 1이므로 구하는 원의 넓이 $a_1 = \pi$ 이다.

R_2 에 포함된 작은 마름모의 대각선의 길이의 길이가 3이므로 큰마름모와 작은 마름모의 길이의 비는 8:3이다.

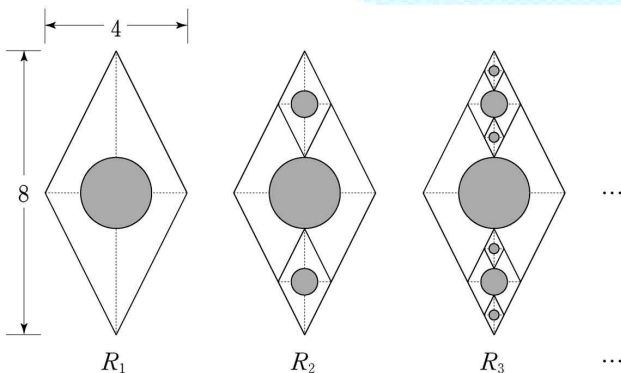
따라서 원의 넓이의 비는 64:9이다.

$$\therefore a_2 = \frac{9}{64} \pi$$

R_1, R_2, R_3, \dots 에서 원의 개수가 차례로 1개, 2개, 4개, ...로 늘어나므로 R_n 에 포함된 원의 넓이의 합을 S_n 이라하면

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + 2a_2 + 2^2a_3 + \dots + 2^{n-1}a_n \\ &= \pi + 2 \left(\frac{9}{64} \pi \right) + 2^2 \left(\frac{9}{64} \right)^2 \pi + \dots + 2^{n-1} \left(\frac{9}{64} \right)^{n-1} \pi \text{이다.} \end{aligned}$$

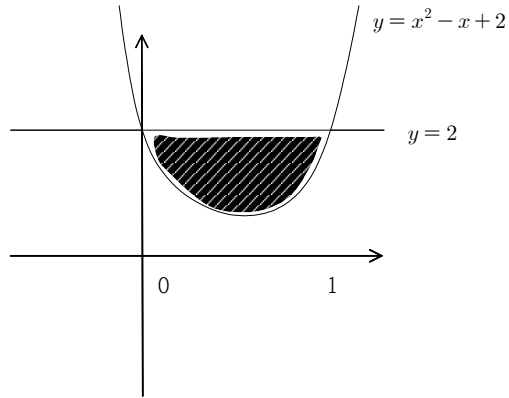
$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\pi}{1 - \frac{9}{64}} = \frac{32}{23} \pi$$



10. 정답: ②

출제의도: 넓이와 적분

곡선 $y = x^2 - x + 2$ 와 직선 $y = 2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 영역의 넓이는

$ABCD$ 에서 곡선과 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$S = 2 - \int_0^1 (x^2 - x + 2) dx = 2 - \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + 2x \right]_0^1 = \frac{1}{6} \text{이다.}$$

[별해] 평행이동

두 함수 $y = x^2 - x + 2$ 와 $y = 2$ 을 각각 y 축 방향으로 -2 만큼 평행이동하면 $y = x^2 - x$, $y = 0$ 이 된다.

따라서 구하는 넓이는 곡선 $y = x^2 - x$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 된다.

$$\int_0^1 |x^2 - x| dx = \frac{1}{6} (1-0)^3 = \frac{1}{6}$$

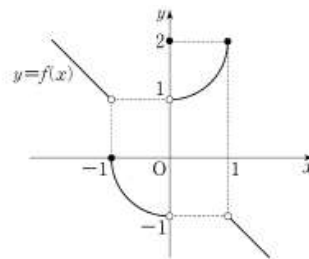
11. 정답: ⑤

출제의도: 함수의 극한

주어진 그래프에서 다음을 각각 구하면

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = 1, f(0) = 2, \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = -1 \text{이다.}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) + f(0) + \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 1 + 2 - 1 = 2$$



12. 정답: ③

출제의도: 독립시행의 확률

주사위를 1개 던져서 6의 약수가 나올 확률은 $\frac{2}{6}$ 이고, 약수가 나오지 않을 확률은 $\frac{4}{6}$ 이다.

i) 6의 약수가 나올 때 동전을 3개 던지므로 구하는 확률은

$$\frac{2}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

ii) 6의 약수가 나오지 않을 때 동전을 2개 던지므로 구하는 확률은

$$\frac{4}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

i), ii)에서 구하는 확률은 $\frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$ 이다.

13. 정답: ①

출제의도: 정적분의 계산에 대한 이해

다항함수 $f(x)$ 에 대하여

ㄱ. 반례) $f(x) = x$ 이므로 거짓이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 의 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\int_0^1 f(x) dx = F(1) - F(0) \text{ 이고,}$$

$$\int_0^2 f(x) dx + \int_2^1 f(x) dx = F(2) - F(0) + F(1) - F(2) = F(1) - F(0)$$

이므로 $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^1 f(x) dx$ 은 참이다.

ㄷ. $f(x) = x$ 라 하면

$$\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$\left\{ \int_0^1 f(x) dx \right\}^2 = \left\{ \int_0^1 x dx \right\}^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \text{ 이므로 거짓이다.}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ 뿐이다.

14. 정답: ③

출제의도: 행렬의 연산

두 조건을 만족하는 행렬 A, B 에 대하여

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix} \text{ 이므로 } B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \text{ 라 하면}$$

$$\text{조건 (가)에서 } B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 이므로}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 에서 } a_1 - a_2 = 0, a_3 - a_4 = 0 \text{ 이다.}$$

$\therefore a_1 = a_2 = x$ 라 하고, $a_3 = a_4 = y$ 라 하면

$$\text{행렬 } B = \begin{pmatrix} x & x \\ y & y \end{pmatrix} \text{ 이다.}$$

조건 (나)에서

$AB = 2A, BA = 4B$ 이므로 대입하여 연립하면

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & x \\ y & y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix} \text{ 에서 } x + y = 2 \text{ 이고,}$$

$$\begin{pmatrix} x & x \\ y & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x & x \\ y & y \end{pmatrix} \text{ 에서 } x + ax = 4x, y + ay = 4y \text{ 이다.}$$

두 식을 더하면

$x + y + a(x + y) = 4(x + y)$ 에서 $a = 3$ 이다.

$$\therefore A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & x \\ y & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x & 1+x \\ a+y & a+y \end{pmatrix}$$

따라서 $A + B$ 의 (1, 2)성분과 (2, 1)성분의 합을 구하면 $1 + x + a + y = 1 + 2 + 3 = 6$ 이다.

[다른 풀이]

조건 (나)에서 $A(B - 2E) = O, B(A - 4E) = O$ 이므로 $A(A - 4E) = O$ 을 만족한다.

$\therefore A^2 - 4A = O$ 에서 $1 + a = 4$ 이므로 $a = 3$ 이다.

또, $B(B - 2E) = O$ 을 만족하므로

$B^2 - 2B = O$ 이다.

$$B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \text{ 라 하면}$$

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-q & -p-q \\ r-s & -r-s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 에서 } p = q, r = s \text{ 이다.}$$

$$\therefore B = \begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix} \text{ 이므로 } p + r = 2$$

따라서 $A + B$ 의 (1, 2)성분과 (2, 1)성분의 합을 구하면 $1 + p + a + r = 1 + 2 + 3 = 6$ 이다.

15. 정답: ②

출제의도: 곡선 밖의 한점에서 그은 접선

점 $(0, -4)$ 는 곡선 $y = x^3 - 2$ 밖의 점이므로 곡선 위의 접점을 $(t, t^3 - 2)$ 라 하면 접선의 기울기는 $f'(t) = 3t^2$ 이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y - (t^3 - 2) = 3t^2(x - t) \text{ 이다.}$$

점 $(0, -4)$ 를 지나므로

$$-4 - t^3 + 2 = -3t^3 \text{ 에서 } 2t^3 = 2 \text{ 에서 } t = 1 \text{ 이다.}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y = 3x - 4$ 이다.

접선이 x 축과 만나는 점을 구하면 $0 = 3x - 4$ 에서 $x = \frac{4}{3}$ 이므로

$$a = \frac{4}{3} \text{ 이다.}$$

16. 정답: ⑤

출제의도: 정규분포

제품 A, B 의 무게에 대한 정규분포가 각각

$A \sim N(m, 1), B \sim N(2m, 4)$ 를 따르므로

각각의 확률을 구하면

$$A \sim P(X \geq 1) = P(Z \geq k - m)$$

$$B \sim P(X \leq k) = P(Z \leq \frac{k - 2m}{2}) \text{ 이다.}$$

두 확률이 서로 같으므로

$$k - m = -\frac{k - 2m}{2}$$

$$2k - 2m = -k + 2m$$

$$3k = 4m$$

$$\frac{k}{m} = \frac{4}{3}$$

17. 정답: ㉔

출제의도: 상용로그의 지표와 가수

양수 x 에 대하여 $\log x = n + \alpha$ 의 지표와 가수를 각각 $f(x), g(x)$ 라 하면 $f(x) = n, g(x) = \alpha$ ($0 \leq \alpha < 1$)이므로

조건 (가)에서

$f(x) + 3g(x) = n + 3\alpha = m$ (m 은 정수)에서 $0 \leq 3\alpha < 3$ 의 범위에 속하는 정수이다.

따라서 α 는 $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ 이다.

조건 (나)에서

$\log x = 2 \log x = 2n + 2\alpha$ 이므로

i) $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ 일 때, $f(x^2) = 2n$ 이므로

$f(x) + f(x^2) = n + 2n = 6$ 에서 $n = 2$ 이다.

따라서 두 조건을 만족하는 $\log x$ 를 구하면

$\log x = 2$ 또는 $\log x = 2 + \frac{1}{3}$ 이다.

$\therefore x = 10^2, 10^{\frac{7}{3}}$

ii) $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ 일 때, $f(x^2) = 2n + 1$ 이므로

$f(x) + f(x^2) = n + 2n + 1 = 6$ 에서 $n = \frac{5}{3}$ 이므로 조건을 만족하지 않는다.

따라서 구하는 x 의 값은 10^2 또는 $10^{\frac{7}{3}}$ 이다.

x 값의 곱을 구하면 $10^2 \times 10^{\frac{7}{3}} = 10^{\frac{13}{3}}$ 이다.

18. 정답: ㉑

출제의도: 함수의 증가와 감소

함수 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + 3ax$ 의 역함수가 존재하려면 일대일대응을 만족해야 하므로 모든 실수 x 에 대하여 증가함수가 되어야 한다.

삼차함수가 모든 실수에서 증가함수가 될 조건은 $f'(x) \geq 0$ 이다.

$f'(x) = x^2 - 2ax + 3a$ 이 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이려면

$$\Delta = 4a^2 - 3a \leq 0$$

$$a(a-3) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq a \leq 3$$

따라서 상수 a 의 최대값을 구하면 3이다.

19. 정답: ㉑

출제의도: 점화식의 이해

모든 자연수 n 에 대하여

$$4a_{n+1} - 1 = 4 \times \frac{3a_n - 1}{4a_n - 1} - 1 = 2 - \frac{1}{4a_n - 1}$$

$$a_1 = 1 \text{ 이고}$$

수열 $\{b_n\}$ 을

$$b_1 = 1, b_{n+1} = (4a_n - 1)b_n \quad (n \geq 1) \text{----} (*)$$

이라하면

:

$$b_{n+2} - b_{n+1} = b_{n+1} - b_n \text{이다.}$$

즉, $\{b_n\}$ 은 등차수열이므로 공차 $d = b_2 - b_1$ 이고

$$b_2 = (4a_1 - 1)b_1 = 3 \text{이므로 } d = 2 \text{이다.}$$

$$\therefore b_n = 1 + (n-1)2 = 2n - 1$$

$$\therefore f(n) = 2n - 1$$

$$(*) \text{에 의하여 } 2n + 1 = (4a_n - 1)(2n - 1)$$

$$4a_n - 1 = \frac{2n + 1}{2n - 1}$$

$$4a_n = \frac{2n + 1}{2n - 1} + 1 = \frac{4n}{2n - 1}$$

$$\therefore a_n = \frac{n}{2n - 1}$$

$$\therefore g(n) = \frac{n}{2n - 1}$$

따라서 $f(n) = 2n - 1, g(n) = \frac{n}{2n - 1}$ 이므로

$$f(14) \times g(5) = 27 \times \frac{5}{9} = 15 \text{이다.}$$

20. 정답: ㉔

출제의도: 함수의 연속성

두 함수 $f(x) = x^2 - x + a, g(x) = \begin{cases} f(x+1) & (x \leq 0) \\ f(x-1) & (x > 0) \end{cases}$ 에 대하여

$y = g(x)^2$ 이 $x = 0$ 에서 연속이므로

$$\{g(0)\}^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \{g(x)\}^2 \text{이다.}$$

$$i) \{g(0)\}^2 = \{f(1)\}^2 = a^2$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow 0} \{g(x)\}^2 \text{을 구하면}$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} \{g(x)\}^2 = \lim_{x \rightarrow -0} \{f(x+1)\}^2 = \{f(1)\}^2 = a^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \{g(x)\}^2 = \lim_{x \rightarrow +0} \{f(x-1)\}^2 = \{f(-1)\}^2 = (2+a)^2$$

$$\therefore a^2 = (2+a)^2 \text{에서 } a = -1$$

21. 정답: ㉕

출제의도: 적분의 활용(속도와 가속도)

A의 속도는 $f(t), B$ 의 속도는 $g(t)$ 이고, 지면에서 수직으로 올라가므로

$$\Gamma. \text{ 그림에서 } \int_0^a f(t) dt > \int_0^a g(t) dt \text{이므로}$$

(A가 올라간 거리) > (B가 올라간 거리)이다. (참)

ㄴ. 그림에서 A와 B의 높이 차를 $h(k)$ 라 하면

$$h(k) = \int_0^k (f(t) - g(t)) dt \text{ 이고}$$

그 최대값은 $h'(k) = f(k) - g(k) = 0$ 이므로 $k = 0$ 또는 $k = b$ 이다.

$k = b$ 일 때 극대값이고 최대값이다. (참)

$$ㄷ. \int_0^c f(t) dt = \int_0^c g(t) dt \text{이므로 } t = c \text{이다.}$$

따라서 A와 B의 높이가 같다. (참)

따라서 옳은 것은 $\Gamma, \text{ ㄴ, ㄷ}$ 모두 옳다.

22. 정답: 10

출제의도: 부정형의 극한

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{-5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x+5)}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} (x+5) = 10$$

23. 정답: 39

출제의도: 등차수열의 연산

등차수열 a_n 에 대하여

$$a_2 = a + d = 1$$

$$a_1 + a_6 = a + a + 5d = 8 \text{에서 연립하면 } a = -1, d = 2 \text{이므로}$$

$$\text{일반항 } a_n = -1 + (n-1)2 = 2n - 3 \text{이므로 } a_{21} = 42 - 3 = 39 \text{이다.}$$

24. 정답: 13

출제의도: 행렬의 성분의 이해

두 이차정사각행렬 A, B 의 성분이 각각

$$a_{ij} = i - j + 1, b_{ij} = i + j + 1 \quad (i = 1, 2, j = 1, 2) \text{이므로 행렬}$$

A, B 를 구하면

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \text{이다.}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 10 & 13 \end{pmatrix} \text{에서 } (2, 2) \text{성분은 } 13 \text{이다.}$$

25. 정답: 35

출제의도: 수열 극한의 성질

수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 조건

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)a_n = 2, \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2+1)b_n = 7 \text{을 만족하므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(10n+1)b_n}{a_n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(10n+1)(n^2+1)b_n}{(n+1)a_n} \times \frac{(n+1)}{(n^2+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7(10n+1)(n+1)}{2(n^2+1)} = 35$$

26. 정답: 12

출제의도: 곱의 미분법

$$f(x) = (x^3 + 5)(x^2 - 1) \text{에서 } f'(x) \text{를 구하면}$$

$$f'(x) = 3x^2(x^2 - 1) + (x^3 + 5)2x \text{이다.}$$

$$\therefore f'(1) = 12$$

27. 정답: 30

출제의도: 이항정리를 이용한 계수 구하기

다항식 $(x+a)^5$ 의 전개식에서 각 항의 일반항은 ${}_5C_r x^r a^{5-r}$ 이다.

x^3 의 계수를 구하면 $r=3$ 이므로 ${}_5C_3 a^2$ 이고,

x^4 의 계수를 구하면 $r=4$ 이므로 ${}_5C_4 a$ 이다.

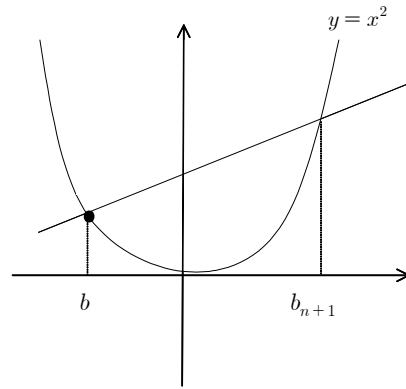
두 계수가 서로 같으므로 ${}_5C_3 a^2 = {}_5C_4 a$ 에서 $10a^2 = 5a$ 이다.

$$a \neq 0 \text{이므로 } a = \frac{1}{2} \text{이다.}$$

$$\therefore 60a = 30$$

28. 정답: 19

출제의도: 등비수열의 극한



$$a_n = 12\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \text{ 이고,}$$

기울기가 a_n 이고, $(-b_n, b_n^2)$ 을 지나는 직선을 l 이라 하면,

$$l \text{ 은 } y - (b_n)^2 = a_n(x + b_n) \text{ 이고,}$$

l 과 $y = x^2$ 와의 교점을 구하면,

$$x^2 - (b_n)^2 = a_n(x + b_n)$$

$$x^2 - a_n x - b_n(a_n + b_n) = 0$$

$$(x + b_n)(x - (a_n + b_n)) = 0 \text{ 에서 } a_n + b_n = b_{n+1}$$

즉, $b_{n+1} - b_n = a_n$ 이므로 b_n 은 계차수열.

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 12\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

$$\text{따라서, } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 + \frac{12}{1 - \frac{1}{3}} = 19$$

29. 정답: 16

출제의도: 표본평균의 확률분포

학생들의 통학시간은 정규분포 $N(50, \sigma^2)$ 을 따른다.

이때, 16명을 추출했으므로 $n=16$ 이고, 표본의 정규분포를 구하

면 $N\left(50, \frac{\sigma}{4}\right)^2$ 이다.

이때,

$$P(50 \leq \bar{X} \leq 56) = P(0 \leq Z \leq \frac{56 - 50}{\frac{\sigma}{4}})$$

$$= P(0 \leq Z \leq \frac{24}{\sigma}) = 0.4332$$

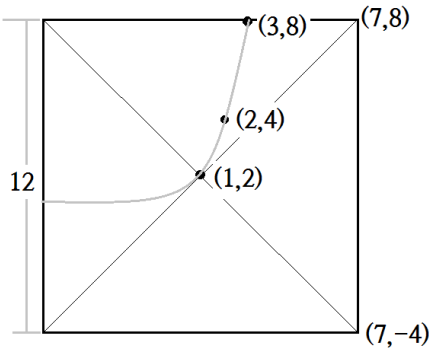
$$\text{이므로 } \frac{24}{\sigma} = 1.5 \text{이다.}$$

$$\therefore \sigma = 16$$

30. 정답: 392

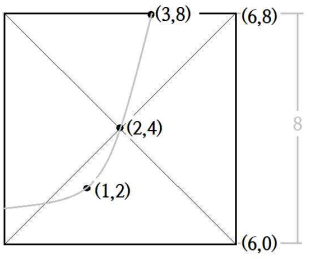
출제의도: 수열의 발견적 추론

i) $n = 1$ 일 때,



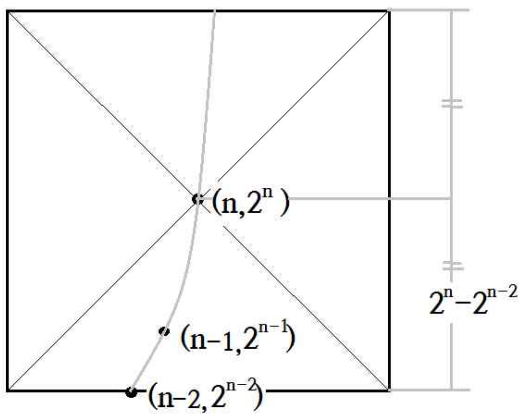
$$a = (8 - 2) \times 2 = 12$$

ii) $n = 2$ 일 때,



$$\therefore a_2 = (8 - 4) \times 2 = 8$$

iii) $n \geq 3$ 일 때,



$$\therefore a_n = (2^n - 2^{n-2}) \times 2 = 3 \times 2^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^7 a_k = 12 + 8 + 3(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) = 392$$