

2008년도 사관학교 문제지

이 과

數理 嶺域

육사. 해사. 공사

- 먼저 문제지에 성명과 수험번호를 정확히 기입하시오.
- 답안지에 성명과 수험번호를 컴퓨터용 수성싸인펜으로 정확히 기입하시오.
- 시험지는 총 8 쪽이고, 30 문항으로 구성되어 있습니다.
- 문항에 따라 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며 음수인 경우에는 ‘음수부호’ 란에 표기를 하여야 하고, 0이 포함된 경우에는 0을 OMR 답안지에 반드시 표기해야 합니다.
- 문제지와 답안지는 함께 제출합니다. 답안지의 표기가 끝나면 재확인하여 답안지는 오른쪽, 문제지는 왼쪽에 얹어놓으시오.

1. 1이 아닌 두 양수 a, b 에 대하여 $a^2 \cdot \sqrt[3]{b} = 1$ 이 성립할 때,
 $\log_a \frac{1}{ab}$ 의 값은? [2점]
- ① -9 ② -3 ③ 3 ④ 5 ⑤ 9

2. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ 와 이차 정사각행렬 B 에 대하여 행렬
 ABA^{-1} 의 역행렬이 A 일 때, 행렬 B 의 모든 성분의 합은? [2점]
- ① -4 ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ 8

3. 부등식 $[x]^3 - 6[x]^2 + 11[x] - 6 \geq 0$ 을 만족시키는 모든 실수 x 의 집합은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [2점]
- ① $\{x \mid x \geq 1\}$ ② $\{x \mid x \geq 3\}$ ③ $\{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$
 ④ $\{x \mid 1 \leq x < 4\}$ ⑤ $\{x \mid 1 \leq x < 2 \text{ 또는 } x \geq 3\}$

4. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족한다.

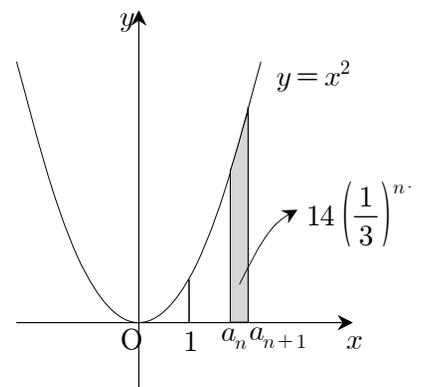
< 조 건 >

(가) $f'(1) = 2$
 (나) 모든 실수 x, y 에 대하여
 $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y) - 3$

이 때, $f(3)$ 의 값은? [3점]

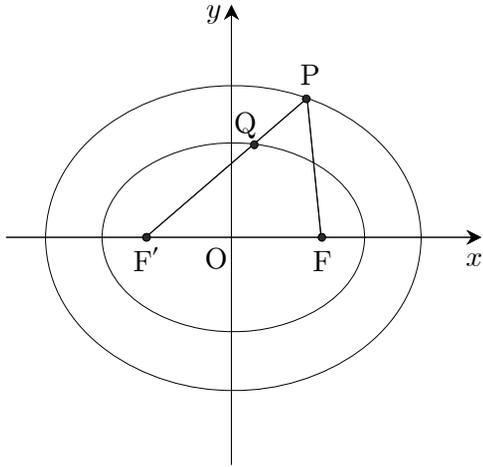
- ① 9 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 21

5. $a_1 = 1$ 이고 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n < a_{n+1}$ 인 수열 $\{a_n\}$ 이 있다. 곡선 $y = x^2$ 과 x 축 및 두 직선 $x = a_n, x = a_{n+1}$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 $14 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 일 때,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값은? [3점]



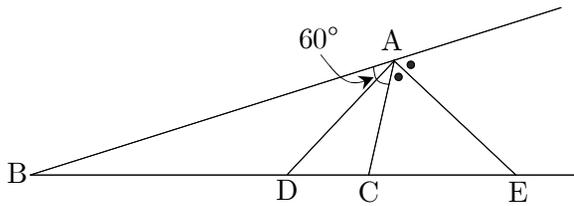
- ① $5\sqrt[3]{5}$ ② $4\sqrt[3]{4}$ ③ $3\sqrt[3]{3}$ ④ 4 ⑤ 5

6. 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{75} = 1$ 의 두 초점을 F, F'이라 하고, 이 타원 위의 점 P에 대하여 선분 F'P가 타원 $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ 과 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{F'Q} = 8$ 일 때, 선분 FP의 길이는? [3점]



- ① 7 ② $\frac{29}{4}$ ③ $\frac{15}{2}$ ④ $\frac{31}{4}$ ⑤ 8

7. $\angle BAC = 60^\circ$ 이고 $\angle BCA > 90^\circ$ 인 둔각삼각형 ABC가 있다. 그림과 같이 $\angle BAC$ 의 이등분선과 선분 BC의 교점을 D, $\angle BAC$ 의 외각의 이등분선과 선분 BC의 연장선의 교점을 E라 할 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]



< 보 기 >

ㄱ. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$

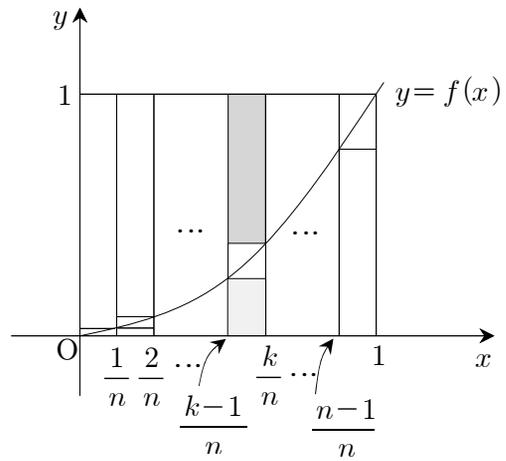
ㄴ. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} > \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE}$

ㄷ. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} > \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. 함수 $f(x) = x^3$ 에 대하여 A_n, B_n 을 다음과 같이 정의하자.

$$A_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{n}, \quad B_n = \sum_{k=1}^n \left\{1 - f\left(\frac{k}{n}\right)\right\} \frac{1}{n}$$



이 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

< 보 기 >

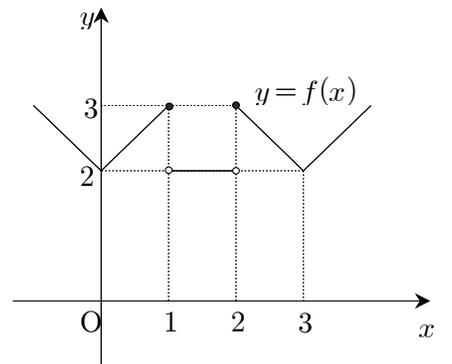
ㄱ. $\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n + B_n) = 1$

ㄴ. $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \frac{3}{4}$

ㄷ. $\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n - B_n) = -\frac{1}{4}$

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. 함수 $f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]



< 보 기 >

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 0} (f \circ f)(x) = 2$

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 1-0} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} (f \circ f)(x)$

ㄷ. 함수 $(f \circ f)(x)$ 는 $x = 3$ 에서 연속이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

10. 삼차함수 $f(x) = x^3 - 3x$ 가 있다. 임의의 양의 실수 a 에 대하여 $f(a) \geq f(b)$ 를 만족시키는 음의 실수 b 의 최대값은? [3점]

- ① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

11. 충분히 크고 비어 있는 물탱크에 다음과 같은 방법으로 물을 넣고 빼는 시행을 한다.

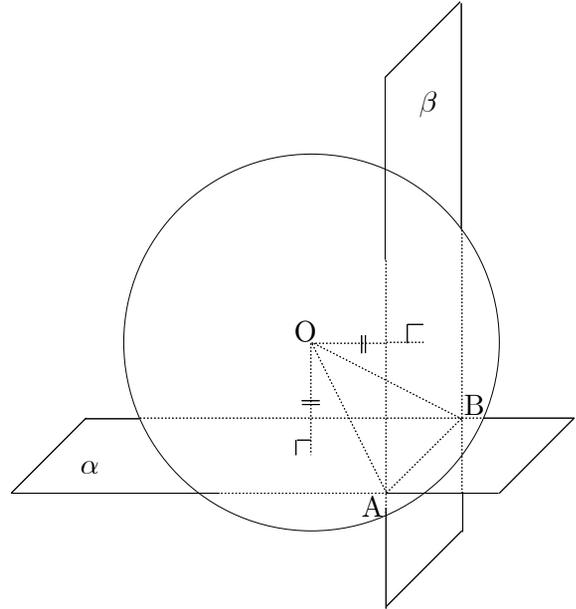
< 다 음 >

- (가) 물을 넣기 시작한 지 t 분 ($0 \leq t \leq 20$)이 지난 순간, 물탱크에 넣는 물의 부피의 변화율은 $(t+8)$ (L/분)이다.
 (나) 물의 양이 130L가 되는 순간부터는 물탱크의 밑바닥에 있는 출구를 열어 물을 뺀다. 이 때, 빠져 나가는 물의 부피의 변화율은 26(L/분)으로 일정하다. 단, 물탱크의 출구를 열어도 (가)의 방법으로 계속 물을 넣는다.

물탱크의 물의 양이 두 번째로 100L가 될 때까지 걸리는 시간은? [4점]

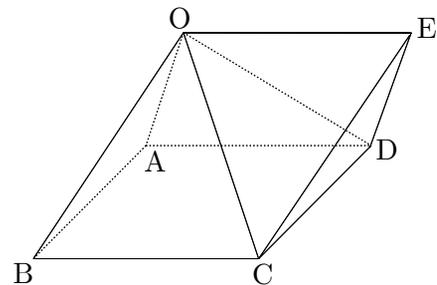
- ① 10분 ② 12분 ③ 14분 ④ 16분 ⑤ 18분

12. 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 구와, 점 O로부터 같은 거리에 있고 서로 수직인 두 평면 α, β 가 있다. 그림과 같이 두 평면 α, β 의 교선이 구와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 OAB가 정삼각형일 때, 점 O와 평면 α 사이의 거리는? [4점]



- ① $\frac{\sqrt{2}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{6}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

13. 그림은 모든 모서리의 길이가 같은 정사각뿔 O-ABCD와 정사면체 O-CDE를 면 OCD가 공유하도록 붙여놓은 것이다. 평면 ABCD와 평면 CDE가 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos^2 \theta$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{2}{9}$ ⑤ $\frac{1}{9}$

14. n 이 자연수일 때, $2n$ 명의 학생을 두 명씩 n 개의 조로 나누는 방법의 수를 a_n 이라 하자. 이 때, $\frac{a_{11}}{a_{10}}$ 의 값은? [3점]

- ① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

15. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 모든 항이 양수인 등차수열일 때, 다음은 수열 $\{\sqrt{a_n b_n}\}$ 이 등차수열이면 $\frac{b_n}{a_n} = \text{(가)}$ 임을 증명한 것이다.

< 증 명 >

수열 $\{\sqrt{a_n b_n}\}$ 이 등차수열이므로 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sqrt{a_n b_n} + \sqrt{a_{n+2} b_{n+2}} = \sqrt{(\text{나})} \cdots \text{㉠}$$

또, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 등차수열이므로

$$a_n + a_{n+2} = 2a_{n+1} \cdots \text{㉡}$$

$$b_n + b_{n+2} = 2b_{n+1} \cdots \text{㉢}$$

㉡, ㉢을 ㉠에 대입한 후, 양변을 제곱하여 정리하면

$$2\sqrt{a_n b_n a_{n+2} b_{n+2}} = a_n b_{n+2} + a_{n+2} b_n$$

다시 위 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$a_{n+2} b_n = \text{(다)} \cdots \text{㉣}$$

따라서 ㉡, ㉢, ㉣에서

$$\frac{b_n}{a_n} = \text{(가)}$$

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

(가) (나) (다)

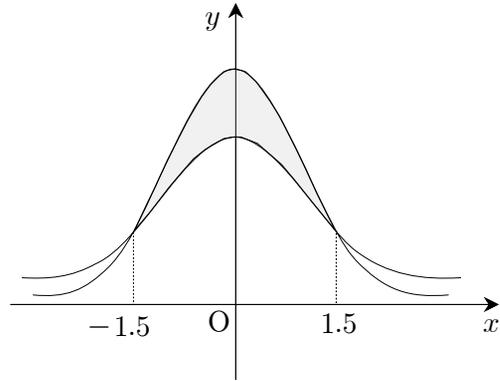
- ① $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ $2 a_{n+1} b_{n+1}$ $2 a_n b_{n+2}$
 ② $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ $4 a_{n+1} b_{n+1}$ $a_n b_{n+2}$
 ③ $\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$ $2 a_{n+1} b_{n+1}$ $2 a_n b_{n+2}$
 ④ $\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$ $4 a_{n+1} b_{n+1}$ $a_n b_{n+2}$
 ⑤ $\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$ $4 a_{n+1} b_{n+1}$ $2 a_n b_{n+2}$

16. 확률변수 X 는 정규분포 $N(0, \sigma^2)$ 을 따르고, 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1^2)$ 을 따른다. 두 확률변수 X, Z 의 확률밀도함수를 각각 $f(x), g(x)$ 라 할 때, 다음 조건이 모두 성립한다.

< 조 건 >

- (가) $\sigma > 1$
 (나) 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 는 $x=-1.5, x=1.5$ 일 때 만난다.

두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 0.096일 때, X 의 표준편차 σ 의 값을 아래 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]



z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.2	0.385
1.5	0.433
2.0	0.477

- ① 1.20 ② 1.25 ③ 1.50 ④ 1.75 ⑤ 2.00

17. 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 S_n, T_n 을 다음과 같이 정의하자.

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad T_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$$

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

< 보 기 >

- ㄱ. $a_n + S_n = 2$ (단, $n=1, 2, 3, \dots$)
 ㄴ. $T_n = a_{n-1}$ (단, $n=2, 3, 4, \dots$)
 ㄷ. $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n + T_n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

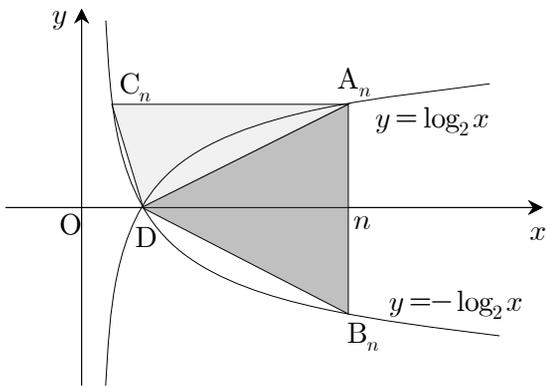
- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 어느 농장에서 생산된 포도송이의 무게는 평균 600g, 표준편차 100g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 농장에서 생산된 포도송이 중 임의로 100 송이를 추출할 때, 포도송이의 무게가 636g 이상인 것이 42송이 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.36	0.14
1.00	0.34
1.25	0.39
2.00	0.48

- ① 0.02 ② 0.11 ③ 0.14 ④ 0.16 ⑤ 0.36

19. 그림과 같이 두 곡선 $y = \log_2 x$, $y = -\log_2 x$ 가 직선 $x = n$ (n 은 2 이상의 자연수)과 만나는 점을 각각 A_n , B_n 이라 하고, 점 A_n 을 지나고 x 축과 평행한 직선이 곡선 $y = -\log_2 x$ 와 만나는 점을 C_n 이라 하자. 점 $D(1, 0)$ 에 대하여 두 삼각형 $A_n B_n D$, $A_n C_n D$ 의 넓이를 각각 S_n , T_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{S_n}$ 의 값은? [3점]



- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{8}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{7}{8}$ ⑤ 1

20. [표 1]은 20개의 행과 20개의 열로 이루어진 표에 자연수를 규칙적으로 적어놓은 것이다.

	제1열	제2열	제3열	제4열	제5열	...	제k열	...	제20열
제1행	1	2	3	4	5	...	k	...	20
제2행	2	2	3	4	5	...	k	...	20
제3행	3	3	3	4	5	...	k	...	20
제4행	4	4	4	4	5	...	k	...	20
제5행	5	5	5	5	5	...	k	...	20
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	...	⋮
제k행	k	k	k	k	k	...	k	...	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
제20행	20	20	20	20	20	20

[표 1]

[표 2]는 [표 1]의 홀수 번째 행에 있는 수와, 짝수 번째 열에 있는 수를 모두 지운 것이다.

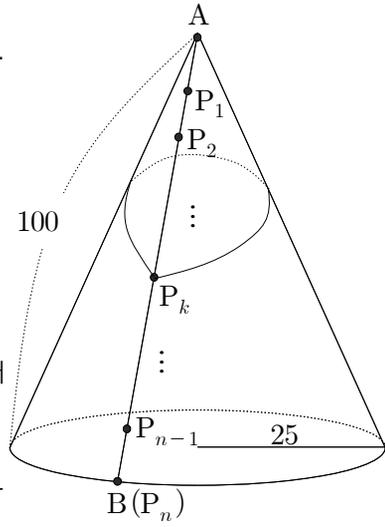
	제1열	제2열	제3열	제4열	제5열	...	제20열
제1행							
제2행	2		3		5	...	
제3행							
제4행	4		4		5	...	
제5행							
⋮	⋮		⋮		⋮	⋱	
제20행	20		20		20	...	

[표 2]

[표 2]에 남아 있는 모든 자연수의 합은? [4점]

- ① 1024 ② 1155 ③ 1225 ④ 1280 ⑤ 1385

21. 밑면의 반지름의 길이가 25, 모선의 길이가 100인 원뿔이 있다. 자연수 n 에 대하여 그림과 같이 모선 \overline{AB} 를 n 등분한 점 중 꼭지점 A 에 가까운 점부터 차례로 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}$ 이라 하고, 점 B 를 P_n 이라 하자. 또, 점 P_k ($k=1, 2, 3, \dots, n$)에서 원뿔의 옆면을 한 바퀴 돌아서 점 P_k 로 되돌아오는 최단 경로의 길이를 l_k 라 할 때, $S_n = \sum_{k=1}^n l_k$ 라



하자. 이 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$ 의 값은? [4점]

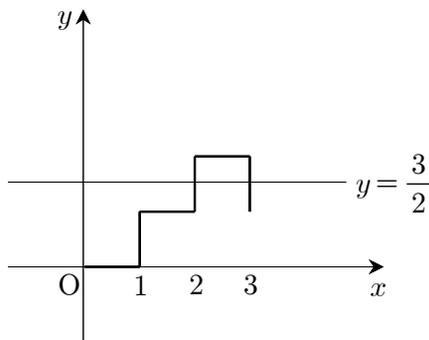
- ① $50\sqrt{2}$ ② $75\sqrt{2}$ ③ $100\sqrt{2}$ ④ $125\sqrt{2}$ ⑤ $150\sqrt{2}$

22. 좌표평면 위의 원점에 놓인 점 P 가 1개의 동전을 던질 때마다 다음과 같이 움직인다고 한다.

< 다 음 >

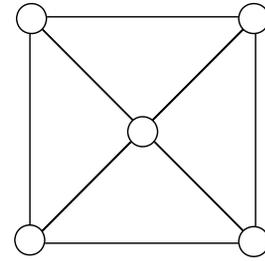
앞면이 나오면 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동하고, 뒷면이 나오면 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동 한다.

예를 들어, 동전을 3번 던져서 차례로 앞면, 앞면, 뒷면이 나왔을 때 점 P 가 지나간 자취는 그림과 같고, 이 자취는 직선 $y = \frac{3}{2}$ 과 두 점에서 만난다. 동전을 5번 던질 때, 점 P 가 지나간 자취와 직선 $y = \frac{3}{2}$ 이 오직 한 점에서 만날 확률은? [4점]



- ① $\frac{3}{32}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{5}{32}$ ④ $\frac{7}{32}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

23. 그림과 같이 정사각형과 서로 합동인 5개의 원으로 이루어진 놀이판이 있다. 각 원의 중심은 정사각형의 네 꼭지점과 두 대각선이 만나는 점이다. 서로 다른 5개의 돌 중에서 3개를 뽑아 3개의 원 안에 각각 1개씩 올려놓는 방법의 수는? (단, 회전하여 같은 경우는 한 가지로 계산한다.) [4점]



- ① 150 ② 160 ③ 170 ④ 190 ⑤ 200

24. 어떤 영화의 흥행수입을 분석한 결과, 개봉한 후 50일째까지의 총 흥행수입이 400억 원이고, 개봉한 후 100일째까지의 총 흥행수입이 640억 원이라고 한다. 이 영화를 개봉한 후 n 일째까지의 총 흥행수입을 $f(n)$ (억 원)이라 하면

$$f(n) = a(1 - b^n) \quad (\text{단, } a, b \text{는 양의 상수, } n \text{은 자연수})$$

이 성립한다고 하자. 이 영화의 총 흥행수입이 처음으로 800억 원을 넘어서는 날은 개봉한 후 며칠 째인가? (단, $\log 2 = 0.30$, $\log 3 = 0.48$ 로 계산한다.) [4점]

- ① 140일 ② 150일 ③ 160일 ④ 170일 ⑤ 180일

주관식 문항 (25 ~ 30)

25. 방정식 $3(1 - \log_2 x)^2 - 2(1 - \log_2 x) - 4 = 0$ 의 두 근을 각각 α, β 라 할 때, $\alpha^3 \beta^3$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. $x \neq 2$ 인 모든 실수 x 에서 정의된 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 다음 두 조건을 만족한다.

< 조건 >

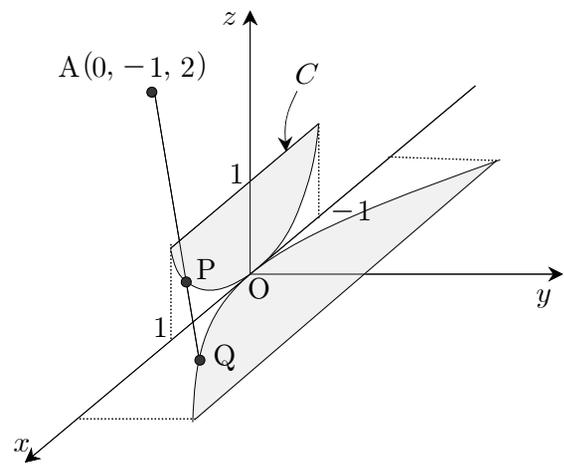
(가) $\lim_{x \rightarrow 2} \{2f(x) + g(x)\} = 1$ (나) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \infty$

이 때, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4f(x) - 40g(x)}{2f(x) - g(x)}$ 의 값을 구하시오. [3점]

27. y 축을 준선으로 하고 초점이 x 축 위에 있는 두 포물선이 있다. 두 포물선이 y 축에 대하여 서로 대칭이고, 두 포물선의 꼭지점 사이의 거리는 4이다. 두 포물선에 동시에 접하고 기울기가 양수인 직선을 그을 때, 두 접점 사이의 거리를 d 라 하자. d^2 의 값을 구하시오. [3점]

28. 좌표공간에서 구 $(x-12)^2 + (y-5)^2 + (z-10)^2 = 100$ 이 xy 평면과 접하는 점을 A라 하고, 구 위를 움직이는 점을 P라 하자. 이 때, $\vec{OA} \cdot \vec{OP}$ 의 최대값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

29. 좌표공간에서 집합 $\{(x, y, z) \mid x^2 + (z-1)^2 \leq 1, y=0, 0 \leq z \leq 1\}$ 이 나타내는 도형을 C라 하자. 점 A(0, -1, 2)와 도형 C 위의 점 P를 지나는 직선이 xy 평면과 만나는 점을 Q라 하면 점 Q가 나타내는 도형의 넓이는 $\frac{b}{a}$ 이다. 이 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



30. 자연수 n 에 대하여 2.52^{10n} 의 최고자리의 숫자를 a_n 이라 하자. 예를 들어, $2.52^{10} \doteq 1.03 \times 10^4$, $2.52^{20} \doteq 1.06 \times 10^8$, $2.52^{30} \doteq 1.10 \times 10^{12}$ 이므로 $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ 이다. $a_n > 1$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최소값을 구하시오. (단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 2.52 = 0.4014$ 로 계산한다.) [4점]