

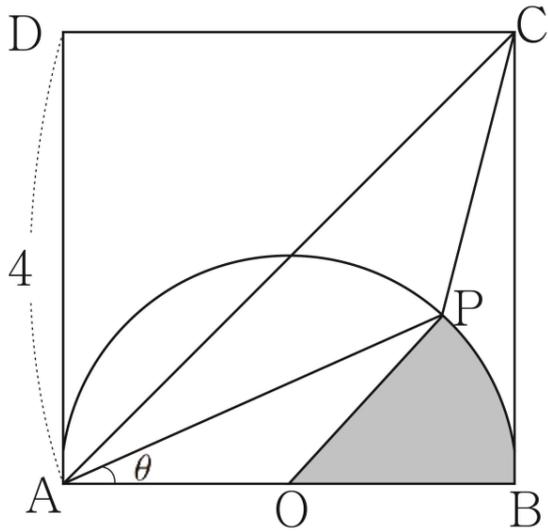
고지우의 **난문현답**

제 18 일

1. 2006년 9월 평가원
2. 2012년 6월 평가원
3. 2010년 10월 교육청
4. 2017년 수능
5. 2014년 7월 교육청
6. 2008년 10월 교육청
7. 2012년 수능
8. 2011년 7월 교육청
9. 2007년 수능
10. 2007년 3월 교육청

1. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD에서 변 AB의 중점을 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 반원 위의 점 P가 있다.

$\angle BAP = \theta$ 일 때, 삼각형 APC의 넓이를 $f(\theta)$, 부채꼴 OBP의 넓이를 $g(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{8-f(\theta)}{g(\theta)} = \alpha$ 라 할 때, 10α 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)



2. 양의 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수

$$f(x) = \frac{1}{27}(x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 19x)$$

에 대하여 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

- ㄱ. 점 (2,2)는 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점이다.
- ㄴ. 방정식 $f(x)=x$ 의 실근 중 양수인 것은 $x=2$ 하나뿐이다.
- ㄷ. 함수 $|f(x)-g(x)|$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하다.

- ① ㄱ
- ② ㄴ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄱ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3. 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=-f(x)$ 를 만족시킨다. 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \frac{d}{dx} \int_{-\frac{\pi}{2}}^x \cos t \cdot f(t) dt$$

라 할 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

- ㄱ. $g(0)=0$
- ㄴ. 모든 실수 x 에 대하여 $g(-x)=-g(x)$ 이다.
- ㄷ. $g'(e)=0$ 인 실수 c 가 열린 구간 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 에서 적어도 두 개 존재한다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4. 닫힌 구간 $[0, 1]$ 에서 증가하는 연속함수 $f(x)$ 가

$$\int_0^1 f(x) dx = 2, \quad \int_0^1 |f(x)| dx = 2\sqrt{2}$$

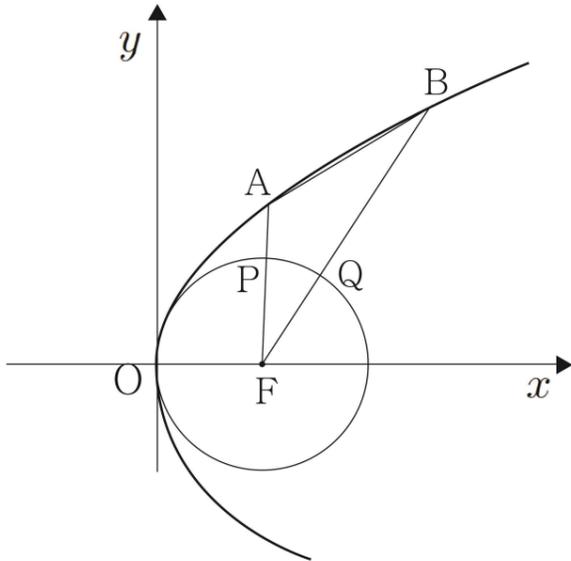
를 만족시킨다. 함수 $F(x)$ 가

$$F(x) = \int_0^x |f(x)| dx \quad (0 \leq x \leq 1)$$

일 때, $\int_0^1 f(x)F(x) dx$ 의 값은?

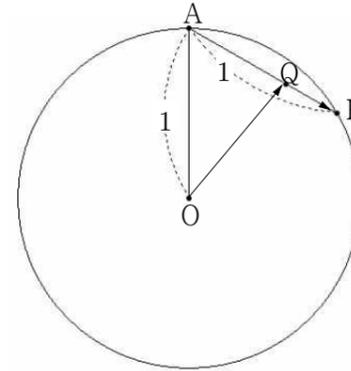
- ① $4 - \sqrt{2}$ ② $2 + \sqrt{2}$ ③ $5 - \sqrt{2}$
- ④ $1 + 2\sqrt{2}$ ⑤ $2 + 2\sqrt{2}$

5. 그림과 같이 포물선 $y^2 = 4px$ 의 초점 F를 중심으로 하고 원점을 지나는 원 C가 있다 포물선 위의 점 A와 점 B에 대하여 선분 FA와 선분 FB가 원 C와 만나는 점을 P, Q라 할 때, 점 P는 선분 FA의 중점이고, 점 Q는 선분 FB를 2:5로 내분하는 점이다. 삼각형 AFB의 넓이가 24일 때, p 의 값은?
(단, 점 A와 점 B는 제 1사분면 위에 있다.)



- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

6. 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 구 위에 고정된 점 A가 있고, $\overline{AP}=1$ 을 만족시키면서 이 구 위를 움직이는 점 P가 있다. 이때 선분 AP 위의 점 Q가 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{OQ} \geq 0$ 을 만족시킬 때, 점 Q가 존재하는 영역의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{3}\pi$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.)



7. 좌표공간에서 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 삼각형 ABC의 넓이는 6이다.
(나) 삼각형 ABC의 yz 평면 위로의 정사영의 넓이는 3이다.

삼각형 ABC의 평면 $x-2y+2z=1$ 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은?

- ① $2\sqrt{6}+1$ ② $2\sqrt{2}+3$ ③ $3\sqrt{5}-1$
④ $2\sqrt{5}+1$ ⑤ $3\sqrt{6}-2$

8. 순서대로 읽은 수와 거꾸로 읽은 수가 일치하는 자연수를 대칭수라 한다. 예를 들어 345543은 대칭수이고, 345567은 대칭수가 아니다. 0과 1만을 이용하여 n 자리 대칭수를 만들 때, 사용된 1의 개수가 0의 개수보다 많은 n 자리 대칭수의 개수를 a_n 이라 하자.

이때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{300}{a_{4n}}$ 의 값을 구하시오.

9. $1, 2, 3, \dots, 3n$ (n 은 자연수)의 숫자가 하나씩 적혀 있는 $3n$ 장의 카드 중 임의로 꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 두 수를 각각 $a, b(a < b)$ 라 하자. $3a < b$ 일 확률을 P_n 이라 할 때, 다음은 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ 의 값을 구하는 과정이다.

$3n$ 장의 카드 중 2장의 카드를 꺼내는 경우의 수는 ${}_{3n}C_2$ 이다.
 $3a < b$ 인 경우에는 $b \leq 3n$ 이므로 $1 \leq a < n$ 이다.
따라서 $a = k$ 라 하면 $3a < b$ 를 만족시키는
 b 의 경우의 수는 $\boxed{\text{(가)}}$ 이므로
 $P_n = \frac{\boxed{\text{(나)}}}{{}_{3n}C_2}$ 이다.
그러므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \boxed{\text{(다)}}$ 이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

- | | (가) | (나) | (다) |
|---|------------|---------------------|---------------|
| ① | $3(n-k)$ | $\frac{3}{2}n(n-1)$ | $\frac{1}{3}$ |
| ② | $3(n-k)$ | $\frac{3}{2}n(n-1)$ | $\frac{2}{3}$ |
| ③ | $3(n-k)$ | $3n(n-1)$ | $\frac{2}{3}$ |
| ④ | $3(n-k+1)$ | $3n(n-1)$ | $\frac{1}{3}$ |
| ⑤ | $3(n-k+1)$ | $3n(n-1)$ | $\frac{1}{3}$ |

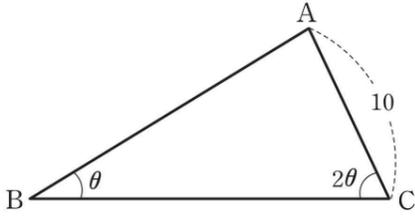
10. A, B, C, D 4개의 축구팀이 있다. 이들은 각각 다른 모든 팀과 1경기씩을 치르게 되고, 각각의 팀이 경기에서 이길 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다. 경기에서 모두 이기거나, 경기에서 모두 진 팀이

생길 확률을 $\frac{n}{m}$ (m, n 은 서로소인 자연수)이라 할 때, $m+n$ 의 값을 구하시오. (단, 비기는 경기는 없다)

18일차 과제

1. 그림과 같이 $\overline{AC}=10$ 이고 $\angle ABC=\theta$, $\angle ACB=2\theta$ 인 삼각형 ABC의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{S(\theta)}{\theta}$ 의 값을 구하시오.

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$)



2. 열린 구간 $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 가

$$(1 - \cos x)f(x) = (e^{2x} - 1)\ln\left(1 + \frac{1}{2}x\right)$$

를 만족시킬 때, $f(0)$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3
- ④ 4 ⑤ 5

3. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = x^2 + x + 1$ 이고 $g(1) = g'(1) = 3$ 이다. 함수 $g(x)$ 가 일대일대응일 때, $f'(3)$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 2
- ④ 3 ⑤ 4

4. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 역함수가 존재하는 함수 $f(x)$ 가 있다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 4)$ 에서의 접선의 기울기가 $\frac{1}{6}$ 이다. 함수 $f(3x+4)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $\frac{g'(4)}{\{g(4)\}^2}$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3
- ④ 4 ⑤ 5

18일차 과제

5. 함수 $f(x) = e^x \sqrt{e^x + 2}$ 에 대하여

$F(x) = \frac{d}{dx} \int (e^x - 1)f(x) dx$ 라 할 때, $F(\ln 2)$ 의 값은?

- ① 2 ② 4 ③ 6
 ④ 8 ⑤ 10

6. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 모든 양수 x 에 대하여

$$f(x) + xf'(x) = \frac{1}{x}$$

을 만족시킨다. $f(1) = 0$ 일 때, $f'(\sqrt{e})$ 의 값은?

- ① $-\frac{3}{2e}$ ② $-\frac{1}{2e}$ ③ $\frac{1}{2e}$
 ④ $\frac{1}{e}$ ⑤ $\frac{3}{2e}$

7. $x > 0$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \int_0^x \frac{2-t}{1+t} dt$ 는 $x=a$ 일 때 최댓값 M 을 갖는다. 두 상수 a, M 에 대하여 $a+M$ 의 값은?

- ① $3\ln 3 - 2$ ② $3\ln 3 - 1$ ③ $3\ln 3$
 ④ $3\ln 3 + 1$ ⑤ $3\ln 3 + 2$

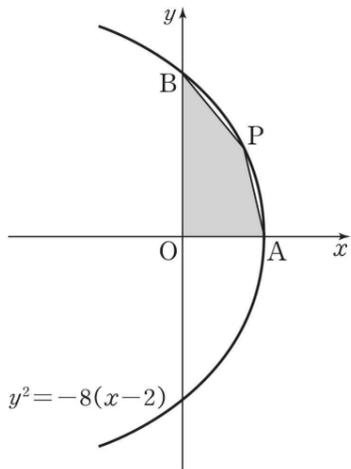
8. 함수 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 에 대하여 등식

$\int_{-1}^1 (3-x)f'(x) dx = kf(1)$ 을 만족시키는 상수 k 의 값을 구하시오.

18일차 과제

9. 포물선 $y^2 = 4px$ ($p > 0$)의 초점을 F, 포물선 위의 점 $A(9p, 6p)$ 에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 H, 포물선의 준선이 x 축과 만나는 점을 B라 하자. $\overline{AH} = 30$ 일 때, 사각형 AHBF의 넓이를 구하시오.

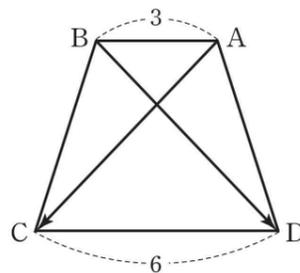
10. 그림과 같이 포물선 $y^2 = -8(x-2)$ 가 x 축, y 축의 양의 부분과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 포물선의 제 1사분면 위의 한 점을 P라 할 때, 사각형 OAPB의 넓이의 최댓값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)



11. 좌표공간에 네 점 $A(3, -1, 0)$, $B(2, 4, 0)$, $C(0, 0, a)$, $D(0, 0, b)$ ($a < b$)가 있다. $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ 일 때, 선분 CD의 길이의 최솟값은?

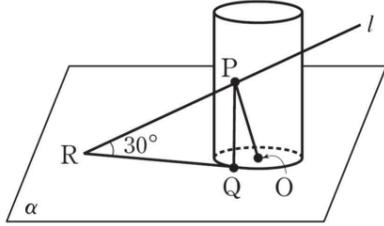
- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
- ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

12. 그림과 같이 $\overline{AB} = 3$, $\overline{CD} = 6$ 인 등변사다리꼴 ABCD가 있다. $|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}|$ 의 값을 구하시오. [3점]



18일차 과제

13. 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 6, 높이가 20인 원기둥의 아래쪽 밑면이 평면 α 위에 놓여 있다. 원기둥의 아래쪽 밑면의 중심을 O, 원기둥의 옆면에 접하는 직선을 l , 직선 l 과 원기둥의 접점을 P, 점 P에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 Q, 직선 l 과 평면 α 가 만나는 점을 R라 하자. $\angle PRQ = 30^\circ$, $\overline{OP} = 10$ 일 때, 점 O와 직선 l 사이의 거리는?



- ① $2\sqrt{19}$ ② $4\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{21}$
 ④ $2\sqrt{22}$ ⑤ $2\sqrt{23}$

14. 좌표공간에서 구

$$S: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 27$$

의 중심을 C라 하자. 원점 O와 점 C를 지나는 직선이 구 S와 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 할 때, 선분 AB의 평면 $x-y+z+10=0$ 위로의 정사영의 길이는 l 이다. l^2 의 값을 구하시오.

15. 1, 2, 3, 4, 5의 다섯 개의 숫자를 중복을 허락하여 배열하여 만든 다섯 자리의 자연수 중에서 천의 자리에 오는 수는 홀수이고 일의 자리에 오는 수는 짝수인 자연수의 개수는?

- ① 625 ② 750 ③ 1000
 ④ 1125 ⑤ 1500

16. 두 집합

$$A = \{a, b, c, d\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: A \rightarrow B$ 의 개수를 구하시오.

- (가) $f(a)$ 와 $f(b)$ 는 홀수이다.
 (나) $f(c)$ 와 $f(d)$ 는 짝수이고 $f(c) < f(d)$ 이다.

18일차 과제

17. 1, 2, 2, 3, 3, 3의 여섯 개의 숫자를 모두 배열하여 만들 수 있는 여섯 자리의 자연수의 집합에서 하나의 원소를 임의로 택할 때, 223133, 312323과 같이 숫자 3과 3 사이에 숫자 1이 있을 확률은?

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
- ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

18. 1이 적혀 있는 공 4개, 2가 적혀 있는 공 4개, 3이 적혀 있는 공 2개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 한 개씩 2개의 공을 임의로 꺼낼 때, 나온 공에 적힌 수를 차례로 a, b 라 하자. $5 \times a \times b$ 가 홀수일 때, 이 수가 15 이상일 확률은?
(단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

- ① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{7}{15}$ ③ $\frac{8}{15}$
- ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

19. 상자 A에는 흰 공 3개, 검은 공 4개가 들어 있고 상자 B에는 흰 공 2개, 검은 공 3개가 들어 있다. 상자 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내고 꺼낸 2개의 공을 상자 B에 넣은 후 상자 B에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 흰 공 2개가 나올 확률은?

- ① $\frac{17}{147}$ ② $\frac{6}{49}$ ③ $\frac{19}{147}$
- ④ $\frac{20}{147}$ ⑤ $\frac{1}{7}$

20. 주머니 속에 자연수 $k(k=1, 2, 3, 4, 5)$ 가 적힌 공이 k 개씩 들어 있다. 이 15개의 공 중에서 동시에 3개의 공을 임의로 꺼낼 때, 3개의 공에 적힌 수의 합이 12일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)