

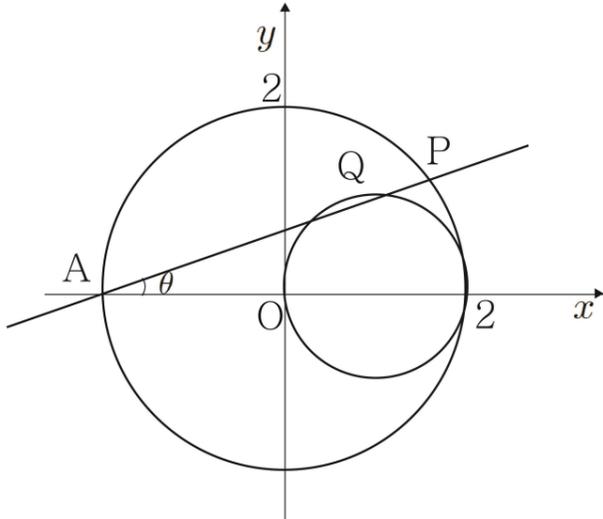
고지우의 **난문현답**

제 19 일

1. 2013년 9월 평가원
2. 2015년 4월 교육청
3. 2007년 수능
4. 2016년 10월 교육청
5. 2014년 9월 평가원
6. 2012년 4월 교육청
7. 1997년 수능
8. 2010년 11월 교육청
9. 2009년 6월 평가원
10. 2016년 사관학교

1. 그림과 같이 점 $A(-2,0)$ 을 지나는 직선 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 P 에 대하여 직선 AP 가 원 $(x-1)^2+y^2=1$ 과 두 점에서 만날 때 두 점 중에서 점 P 에 가까운 점을 Q 라 하자.

$\angle OAP = \theta$ 이라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\overline{PQ}}{\theta^2}$ 의 값은?



- ① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$
 ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

2. 함수 $f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 e^x + k & (x \geq 0) \\ -x^2 & (x < 0) \end{cases}$ 에 대하여

함수 $f(x) = |f(x)| - f(x)$ 가 다음 조건을 만족하도록 하는 정수 k 의 개수는?

(가) 함수 $g(x)$ 는 모든 실수에서 연속이다.
 (나) 함수 $g(x)$ 는 미분가능하지 않은 점이 2개다.

- ① 3 ② 4 ③ 5
 ④ 6 ⑤ 7

3. 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$ 에 대하여 점 $A(a, f(a))$ 를 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점이라 하고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$ 라 하자. 직선 $y=g(x)$ 가 함수 $f(x)$ 의 그래프와 점 $B(b, f(b))$ 에서 접할 때, 함수 $h(x)$ 를 $h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하자. [보기]에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $a \neq b$ 이다.)

- ㄱ. $h'(b)=0$
 ㄴ. 방정식 $h'(x)=0$ 은 3개 이상의 실근을 갖는다.
 ㄷ. 점 $(a, h(a))$ 는 곡선 $y=h(x)$ 의 변곡점이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)=f(-x)$ 이다.
 (나) 모든 양의 실수 x 에 대하여 $f'(x)>0$ 이다.
 (다) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=\pi$

함수 $g(x)=\frac{\sin f(x)}{x}$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

- ㄱ. 모든 양의 실수 x 에 대하여 $g(x)+g(-x)=0$ 이다.
 ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)=0$
 ㄷ. $f(\alpha)=\frac{\pi}{2}$ ($\alpha>0$)이면 방정식 $|g(x)|=\frac{1}{\alpha}$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5. 자연수 n 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 를 매개변수 t 로 나타내면

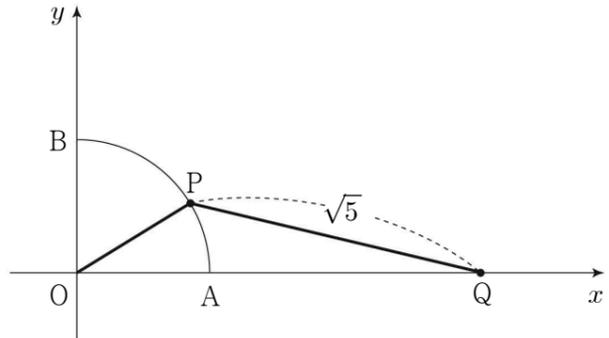
$$\begin{cases} x = e^t \\ y = (2t^2 + nt + n)e^t \end{cases}$$

이고, $x \geq e^{-\frac{n}{2}}$ 일 때 함수 $y=f(x)$ 는 $x=a_n$ 에서의 최솟값 b_n 을 갖는다.

$\frac{b_3}{a_3} + \frac{b_4}{a_4} + \frac{b_5}{a_5} + \frac{b_6}{a_6}$ 의 값은?

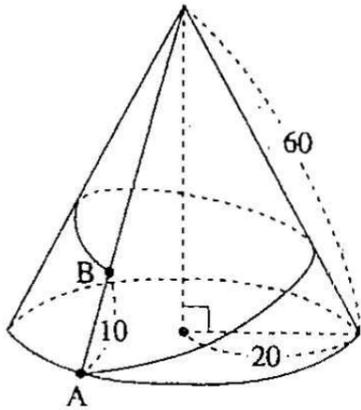
- ① $\frac{23}{2}$ ② 12 ③ $\frac{25}{2}$
 ④ 13 ⑤ $\frac{27}{2}$

6. 좌표평면 위에 그림과 같이 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 이고 반지름의 길이가 1인 부채꼴 OAB가 있다. 점 P가 점 A(1,0)에서 출발하여 호 AB 위를 시계 반대 방향으로 매초 1의 일정한 속력으로 움직일 때, x 축 위의 점 Q는 $\overline{PQ} = \sqrt{5}$ 를 만족시키면서 x 축 위를 움직인다.



$\angle POA = \frac{\pi}{4}$ 가 되는 순간, 점 Q의 x 좌표의 시간(초)에 대한 변화율을 r 이라 할 때, $9r^2$ 의 값을 구하시오.

7. 그림과 같은 직원뿔 모양의 산이 있다. A지점을 출발하여 산을 한 바퀴 돌아 B지점으로 가는 관광 열차의 궤도를 최단 거리로 놓으면, 이 궤도는 처음에는 오르막길이지만 나중에는 내리막길이 된다. 이 내리막길의 길이는?



- ① $\frac{200\sqrt{19}}{19}$ ② $10\sqrt{30}$ ③ $\frac{200\sqrt{91}}{91}$
 ④ $\frac{400\sqrt{91}}{91}$ ⑤ $\frac{300\sqrt{91}}{91}$

8. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_n = \sum_{r=0}^n {}_n C_r 3^r 2^{n-r}$ 이다.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{a_n} = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로 소인 자연수이다.)

9. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$, $Z = \{0, 1\}$ 에 대하여 조건 (가)를 만족시키는 모든 함수 $f: X \rightarrow Y$ 중에서 임의로 하나를 선택하고, 조건 (나)를 만족시키는 모든 함수 $g: Y \rightarrow Z$ 중에서 임의로 하나를 선택하여 합성함수 $g \circ f: X \rightarrow Z$ 를 만들 때, 이 합성함수의 치역이 Z 일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.
(단, p, q 는 서로소인 자연수이다)

(가) X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이다.
(나) g 의 치역은 Z 이다.

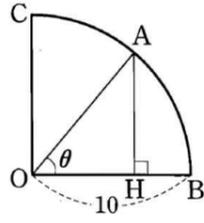
10. 바닥에 놓여있는 5개의 동전 중 임의로 2개의 동전을 선택하여 뒤집는 시행을 하기로 한다. 2개의 동전은 앞면이, 3개의 동전은 뒷면이 보이도록 바닥에 놓여있는 상태에서 이 시행을 3번 반복한 결과 2개의 동전은 앞면이, 3개의 동전은 뒷면이 보이도록 바닥에 놓여 있을 확률은?
(단, 동전의 크기와 모양은 모두 같다.)

- ① $\frac{77}{125}$ ② $\frac{31}{50}$ ③ $\frac{78}{125}$
④ $\frac{157}{250}$ ⑤ $\frac{79}{125}$

19일차 과제

1. 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 10인 사분원 위의 한 점 A에서 반지름 OB에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle AOB = \theta$ 라 할 때,

$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\overline{BH}}{\theta^2}$ 의 값을 구하여라.



3. 함수 $f(x) = \frac{x^2}{e^{x+1}}$ ($x > 0$)이 $x = \alpha$ 에서 최댓값을 가질 때, α 의 값을 구하여라.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \tan 5x}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{1}{5}$
- ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

4. 함수 $f(x) = -\frac{x}{x^2+1}$ 와 미분가능한 두 함수 $g(x), h(x)$ 에 대하여 $F(x) = (h \circ g \circ f)(x)$ 라 하자. $F'(0) = 10$ 일 때, $(h \circ g)'(0)$ 의 값은?

- ① -10 ② -5 ③ 0
- ④ 5 ⑤ 10

19일차 과제

5. 함수 $f(x) = a \sin x - x^2$ 의 그래프가 $0 < x < 2\pi$ 에서 두 개의 변곡점을 가질 때, 실수 a 의 값의 범위는?

- ① $a < -2$ 또는 $a > 2$
- ② $0 < a < 2$
- ③ $a < -1$ 또는 $a > 1$
- ④ $0 < a < 1$
- ⑤ $-1 < a < 0$

6. 함수 $f(x) = 3x^2 + a \cos x$ 의 그래프가 변곡점을 갖지 않도록 하는 정수 a 의 개수를 구하여라. (단, $a \neq 0$)

7. $0 < x < \pi$ 일 때, 함수 $f(x) = \sin^3 2x$ 에 대하여 $y = f(x)$ 의 그래프에서 극대 또는 극소가 되는 점의 개수를 구하여라.

8. 다음 함수 $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$ 에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 정의역은 실수 전체의 집합이다. ㄴ. 극댓값은 3이다. ㄷ. $-1 < x < 3$ 에서 증가한다.
--

- ① ㄷ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19일차 과제

9. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가 $x = 2t + 1, y = t^3 - 2t^2 - 4$ 이다. 점 P의 가속도의 크기가 0이 되는 시각은?

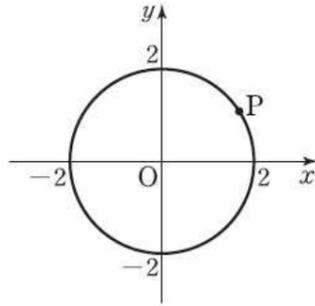
- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ 1
 ④ $\frac{7}{6}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

10. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가 $x = \frac{1}{2}\cos 2t, y = \sin t + 2$ 이다. $0 \leq t \leq \pi$ 에서 점 P의 속력의 최댓값을 M 이라고 할 때, $100M$ 의 값을 구하시오.

11. 그림과 같이 좌표평면에서 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 2인 원 위를 움직이는 점 P가 있다. 점 P의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가

$$x = 2\cos\frac{t^3}{4}, y = 2\sin\frac{t^3}{4}$$

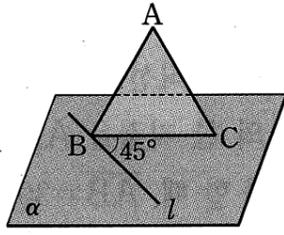
일 때, $t = 0$ 에서 $t = 6$ 까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.



12. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 속도가 $v(t) = \cos \pi t$ 라 한다. $0 < t \leq 2\pi$ 에서 점 P가 원점을 지나는 횟수를 구하여라.

19일차 과제

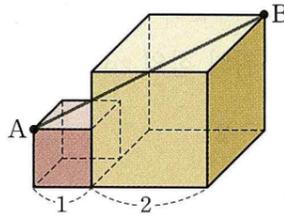
13. 오른쪽 그림과 같이 평면 α 에 포함되는 선분 BC 를 한 변으로 하는 정삼각형 ABC 에 대하여 면 ABC 는 평면 α 와 수직이다. 평면 α 에 포함되는 직선 중 점 B 를 지나고 \overline{BC} 와 이루는 각의 크기가 45° 인 직선을 l 이라 할 때, \overline{AB} 와 l 이 이루는 각의 크기 θ 에 대하여 $\sin\theta$ 의 값을 구하여라.



15. $\log_2({}_{11}C_0 + {}_{11}C_1 + {}_{11}C_2 + {}_{11}C_3 + {}_{11}C_4 + {}_{11}C_5)$ 의 값은?

- ① 9 ② 10 ③ 11
- ④ 12 ⑤ 13

14. 한 모서리의 길이가 각각 1, 2인 두 정육면체를 오른쪽 그림과 같이 붙여 놓았을 때, 두 꼭짓점 A, B 사이의 거리를 구하여라.



16. ${}_6C_0 + 7 \times {}_6C_1 + 7^2 \times {}_6C_2 + \dots + 7^6 \times {}_6C_6$ 의 값은?

- ① 2^{12} ② 2^{14} ③ 2^{16}
- ④ 2^{18} ⑤ 2^{20}

19일차 과제

17. 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b 라 하자. 이차함수 $f(x) = x^2 - 5x + 6$ 에 대하여 $f(a)f(b) = 0$ 이 성립할 확률은?

- ① $\frac{7}{18}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{1}{2}$
 ④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{11}{18}$

18. 집합 $X = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{이하의 자연수}\}$ 에 대하여 두 집합 A, B 를

$$A = \{x \mid x = 2n, n \in X\}, \quad B = \{x \mid x = 2^n, n \in X\}$$

라 하자. 집합 A 의 원소 중에서 임의로 택한 원소를 a , 집합 B 의 원소 중에서 임의로 택한 원소를 b 라 할 때, $a+b$ 가 3의 배수일 확률은?

- ① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{3}{20}$ ③ $\frac{1}{4}$
 ④ $\frac{7}{20}$ ⑤ $\frac{9}{20}$

19. 한 개의 동전을 5번 던질 때, 앞면이 나온 횟수가 뒷면이 나온 횟수보다 클 확률은?

- ① $\frac{7}{16}$ ② $\frac{15}{32}$ ③ $\frac{1}{2}$
 ④ $\frac{17}{32}$ ⑤ $\frac{9}{16}$

20. 한 개의 동전을 8번 던질 때, 앞면이 n 번 나올 확률이 $\frac{7}{32}$ 이다. 모든 자연수 n 의 값의 곱을 구하시오.