

고지우의 **난문현답**

제 19 일

1. 2010년 경찰대
2. 2006년 사관학교
3. 2011년 6월 평가원
4. 2013년 6월 평가원
5. 2016년 수능
6. 2015년 6월 교육청
7. 2008년 4월 교육청
8. 2010년 11월 교육청
9. 2009년 6월 평가원
10. 2016년 사관학교

1. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 4$, $a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 3} - 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)일 때, [보기]에서 옳은 것을 있는 대로 고른 것은?

- ㄱ. 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n > a_{n+1}$ 이다.
 ㄴ. 모든 자연수 n 에 대하여 $2 < a_n < 5$ 이다.

ㄷ. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 3^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}} \cdot 5^{\frac{1}{2^n}} \right\}$

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. 실수전체의 집합에서 정의된 다항함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하고, 모든 실수 x 에 대하여 $f(2x) = 2f(x)$ 를 만족한다. 이 함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & (x \neq 0) \\ f'(0) & (x = 0) \end{cases} \text{으로 정의하자.}$$

[보기]에서 함수 $g(x)$ 에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고르면?

- ㄱ. 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.
 ㄴ. 모든 실수 x 에 대하여 $g(2x) = g(x)$ 이다.
 ㄷ. 함수 $g(x)$ 는 일차함수이다.

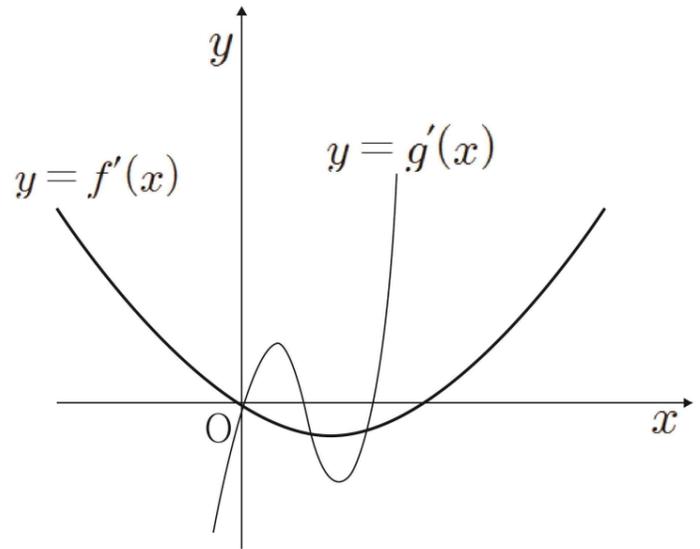
- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3. 서로 다른 두 실수 α, β 가 사차방정식 $f(x)=0$ 의 근일 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

- ㄱ. $f'(\alpha)=0$ 이면 다항식 $f(x)$ 는 $(x-\alpha)^2$ 으로 나누어 떨어진다.
- ㄴ. $f'(\alpha)f'(\beta)$ 이면 방정식 $f(x)=0$ 은 허근을 갖지 않는다.
- ㄷ. $f'(\alpha)f'(\beta)>0$ 이면 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

- ① ㄱ
- ② ㄷ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4. 그림은 삼차함수 $y=f(x)$ 와 사차함수 $y=g(x)$ 의 도함수 $y=f'(x)$ 와 $y=g'(x)$ 의 그래프이다. 옳은 것을 [보기]에서 모두 고르면? (단, $f'(0)=0, g'(0)=0$)



- ㄱ. $x < 0$ 에서 $y=f(x)-g(x)$ 는 증가한다.
- ㄴ. $y=f(x)-g(x)$ 는 한 개의 극솟값을 갖는다.
- ㄷ. $h(x)=f'(x)-g'(x)$ 라 할 때, $h'(x)=0$ 은 서로 다른 2개의 양의 실근을 갖는다.

- ① ㄱ
- ② ㄴ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5. 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 $\frac{f'(0)}{f(0)}$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하자. Mm 의 값은?

(가) 함수 $|f(x)|$ 는 $x=-1$ 에서만 미분가능하지 않다.
 (나) 방정식 $f(x)=0$ 은 닫힌 구간 $[3, 5]$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

- ① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{2}{15}$
 ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

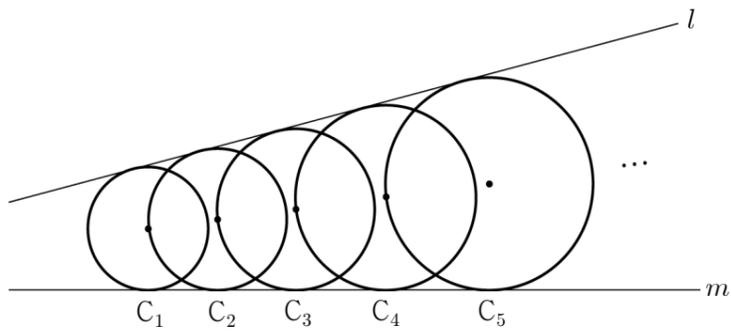
6. 2 이상 100 이하의 자연수 n 에 대하여 집합 $\{\log_n k | k \text{는 자연수}, 1 \leq k \leq n\}$

의 원소 중 유리수의 개수를 $f(n)$ 이라 하자.

예를 들어 $f(3)=2$, $f(4)=3$ 이다.

$f(n) \geq 5$ 가 되는 모든 자연수 n 의 값의 합을 구하시오.

7. 그림과 같이 두 직선 l, m 에 동시에 접하는 원 C_1 이 있다.
 원 C_1 의 중심을 지나고 직선 l, m 에 동시에 접하면서 C_1 보다
 큰 원을 C_2 라 하자.
 원 C_2 의 중심을 지나고 직선 l, m 에 동시에 접하면서 C_2 보다
 큰 원을 C_3 라 하자.
 이와 같은 방법으로 원 C_k 의 중심을 지나고 직선 l, m 에 동시
 에 접하면서 C_k 보다 큰 원을 C_{k+1} 이라 하자. ($k=1, 2, 3, \dots$)
 원 C_1 의 넓이가 1, 원 C_5 의 넓이가 4일 때, 원 C_{19} 의 넓이를
 구하시오.



8. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_n = \sum_{r=0}^n C_r 3^r 2^{n-r}$ 이다.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{a_n} = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로
 소인 자연수이다.)

9. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$, $Z = \{0, 1\}$ 에 대하여 조건 (가)를 만족시키는 모든 함수 $f: X \rightarrow Y$ 중에서 임의로 하나를 선택하고, 조건 (나)를 만족시키는 모든 함수 $g: Y \rightarrow Z$ 중에서 임의로 하나를 선택하여 합성함수 $g \circ f: X \rightarrow Z$ 를 만들 때, 이 합성함수의 치역이 Z 일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.
(단, p, q 는 서로소인 자연수이다)

(가) X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이다.
(나) g 의 치역은 Z 이다.

10. 바닥에 놓여있는 5개의 동전 중 임의로 2개의 동전을 선택하여 뒤집는 시행을 하기로 한다. 2개의 동전은 앞면이, 3개의 동전은 뒷면이 보이도록 바닥에 놓여있는 상태에서 이 시행을 3번 반복한 결과 2개의 동전은 앞면이, 3개의 동전은 뒷면이 보이도록 바닥에 놓여 있을 확률은?
(단, 동전의 크기와 모양은 모두 같다.)

- ① $\frac{77}{125}$ ② $\frac{31}{50}$ ③ $\frac{78}{125}$
④ $\frac{157}{250}$ ⑤ $\frac{79}{125}$

19일차 과제

1. 수렴하는 수열

$$2, 2 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}, \dots$$

의 극한값은?

- ① $3 - \sqrt{2}$ ② $4 - \sqrt{2}$ ③ $1 + \sqrt{2}$
 ④ 3 ⑤ $2 + \sqrt{2}$

2. 두 그릇 A, B에 물이 각각 1L씩 들어 있다. A그릇의 물의 $\frac{1}{3}$ 을 B그릇으로 옮긴 다음 B그릇의 물의 $\frac{1}{3}$ 을 A그릇으로 옮기는 시행을 한없이 계속할 때, A그릇의 물의 양은 몇 L에 한없이 가까워지는지 구하여라.

3. $x=1$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수인 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(x) = x - 1$	ㄴ. $g(x) = x - 1 $
ㄷ. $k(x) = x^2 - 1 $	

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

4. 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않다. $x=0$ 에서 미분가능한 함수인 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $y = xf(x)$	ㄴ. $y = (x^2 + 1)f(x)$
ㄷ. $y = \frac{1}{1 - x^3}f(x)$	

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19일차 과제

5. 사차함수 $f(x)=x^4-6x^2+2ax$ 가 극댓값을 갖도록 하는 정수 a 의 개수를 구하여라.

7. 두 점 $A(0, -3), B(10, -3)$ 에 대하여 점 P 가 곡선 $y=x^2-2$ 위를 움직일 때, $\overline{AB}^2+\overline{BP}^2$ 의 최솟값을 구하여라.

6. 두 함수

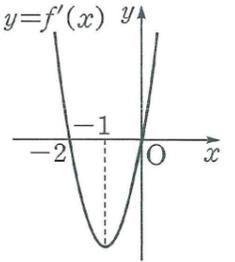
$$f(x)=x^4+2x^3-x^2-9x, \quad g(x)=2x^3+5x^2-x-a$$

에 대하여 $y=f(x)$ 의 그래프가 $y=g(x)$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 있을 때, 실수 a 값의 범위는?

- ① $a < -12$ ② $a < -2$ ③ $a > 4$
- ④ $a > 12$ ⑤ $a > 24$

8. 오른쪽 그림은 함수 $f(x)=x^3+ax^2-bx+c$ $y=f'(x)$ 의 도함수 $y=f'(x)$ 의 그래프이다. 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 3일 때, 구간 $[-3, 2]$ 에서 최댓값은? (단, a, b, c 는 상수이다.)

- ① 3 ② 8 ③ 12
- ④ 15 ⑤ 19



19일차 과제

9. 함수 $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax$ 가 구간 $(-2, 0)$ 에서 극댓값과 극솟값을 모두 갖도록 하는 모든 정수 a 의 값의 합은?

- ① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

10. 함수 $f(x) = x^4 + 2x^3 + ax^2$ 이 극댓값을 갖기 위한 실수 a 의 값의 범위가 $a < \alpha$ 또는 $\beta < a < \gamma$ 일 때, $\alpha + \beta + \gamma$ 의 값은?

- ① -1 ② $-\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{8}$
④ 1 ⑤ $\frac{9}{8}$

11. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 1, $\log_2 5$ 일 때, 실수 a, b 에 대하여 $\frac{b}{a}$ 의 값은?

- ① $-\log_5 2$ ② $-\log_{10} 2$ ③ $-\log_{10} 5$
④ $\log_{10} 2$ ⑤ $\log_{10} 5$

12. 세 수

$A = 5^{\log_5 9 - \log_5 6}$, $B = \log_4 2 + \log_9 3$, $C = \log_8 (\log_{\sqrt{2}} 4)$ 의 대소를 비교하여라.

19일차 과제

13. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} = \frac{31}{16}, \quad \frac{1}{a_2} \cdot \frac{1}{a_4} = \frac{1}{4}$$

일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ 의 값은?

- ① $\frac{8}{31}$ ② $\frac{16}{31}$ ③ $\frac{31}{8}$
④ $\frac{31}{4}$ ⑤ $\frac{31}{2}$

15. $\log_2({}_{11}C_0 + {}_{11}C_1 + {}_{11}C_2 + {}_{11}C_3 + {}_{11}C_4 + {}_{11}C_5)$ 의 값은?

- ① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

14. 빛이 어떤 유리를 한 장 통과할 때마다 빛의 양이 20%씩 줄어든다고 한다. 이 유리를 두 장 통과한 후의 빛의 양은 처음 빛의 양의 몇 %인지 구하여라.

16. ${}_6C_0 + 7 \times {}_6C_1 + 7^2 \times {}_6C_2 + \dots + 7^6 \times {}_6C_6$ 의 값은?

- ① 2^{12} ② 2^{14} ③ 2^{16}
④ 2^{18} ⑤ 2^{20}

19일차 과제

17. 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b 라 하자. 이차함수 $f(x) = x^2 - 5x + 6$ 에 대하여 $f(a)f(b) = 0$ 이 성립할 확률은?

- ① $\frac{7}{18}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{11}{18}$

18. 집합 $X = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 에 대하여 두 집합 A, B 를
 $A = \{x \mid x = 2n, n \in X\}$, $B = \{x \mid x = 2^n, n \in X\}$
라 하자. 집합 A 의 원소 중에서 임의로 택한 원소를 a , 집합 B 의 원소 중에서 임의로 택한 원소를 b 라 할 때, $a+b$ 가 3의 배수일 확률은?

- ① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{3}{20}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{7}{20}$ ⑤ $\frac{9}{20}$

19. 한 개의 동전을 5번 던질 때, 앞면이 나온 횟수가 뒷면이 나온 횟수보다 클 확률은?

- ① $\frac{7}{16}$ ② $\frac{15}{32}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{17}{32}$ ⑤ $\frac{9}{16}$

20. 한 개의 동전을 8번 던질 때, 앞면이 n 번 나올 확률이 $\frac{7}{32}$ 이다. 모든 자연수 n 의 값의 곱을 구하시오.