

1. 확률) 같은 것을 포함하는 순열, 중복조합의 사용가능여부

수학적 확률은 교과서에 다음과 같이 정의되어있다.

어떤 시행의 표본공간 S 가 n 개의 근원사건으로 이루어져 있고, 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대된다고 하자.

이 때 사건 A 가 r 개의 근원사건으로 이루어져 있으면 사건 A 가 일어날 확률 $P(A)$ 를 수학적 확률이라 하고, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{r}{n}$.

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{r}{n}$ 을 모르고 확률 문제를 푸는 학생은 없다.

하지만, 우리는 과연 위에서 밑줄을 그은 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대된다고 하자. 라는 부분의 이해가 확실히 되어있는가에 대한 물음을 해볼 필요가 있다.

두 문제를 풀어보자. (주사위의 각 면엔 하나의 숫자만 적혀있다.)

① 여섯 면에 1, 1, 2, 3, 4, 5가 적혀있는 주사위를 던질 때, 1이 나올 확률은?

② 여섯 면에 1, 1, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적혀있는 주사위를 던졌을 때 나올 수 있는 숫자 중 하나를 임의로 뽑을 때, 1이 뽑힐 확률은?

문제 ①의 정답은 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 이다. 직관적으로 생각해봐도 1이 적힌 면의 수가 다른 숫자가 적힌 면의 수보다 많으므로 $\frac{1}{6}$ 보다 높은 확률일 것이다.

문제 ②의 정답은 $\frac{1}{5}$ 이다. 주사위를 던졌을 때 나올 수 있는 숫자는 1부터 5까지의 자연수이고 그 중 1을 뽑을 확률은 다섯 개 중 하나.

두 문제의 표본공간 S 는 똑같이 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이나 정답과 풀이과정이 전혀 다르다. 그 이유에 대해 자세히 알아보자.

첫 번째 문제는 표본공간의 근원사건 중 하나인 1이 기대되는 정도가 타 원소에 비해 크기 때문에 단순히 $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{r}{n} = \frac{1}{5}$ 로 풀어내면 안된다.

두 번째 문제는 표본공간의 모든 근원사건이 기대되는 정도가 같으므로 $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{r}{n} = \frac{1}{5}$ 로 정답을 낼 수 있다.

즉, 위의 정의 그대로 '근원사건이 기대되는 정도가 같을 때' 일때 만 확률을 $\frac{r}{n}$ 로 정답을 낼 수 있는 것이다.

(cf. 이러한 차이는 문항 발문의 뉘앙스에서 알 수 있으므로, 문제를 읽을 때 제대로 파악하는 것이 좋다.)

결론적으로

[근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대되는 표본공간]을 잡는다면, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{r}{n}$ 에서 n 이나 r 을 구할 때 도구의 구애를 받지 않는다. (같은 것을 포함하는 순열, 중복조합 등등)

(예제) : 중복조합 사용

주머니에 0부터 3까지 적힌 공 4개 중 하나를 뽑아 숫자를 확인한 후 다시 집어넣는 행위를 세 번 시행할 때, 확인한 세 수의 합이 3일 확률은?

(바른 풀이)

나온 순서대로 세 수를 x, y, z 라 할 때, 전체 경우의 수는 x, y, z 가 각각 4가지의 숫자 중 하나를 선택하므로 4^3 .

세 수의 합이 3이다. $\Rightarrow x+y+z=3$ 이다. $\Rightarrow x, y, z$ 가 3이하의 음이 아닌 정수이므로 $x+y+z=3$ 을 만족하는 (x, y, z) 의 개수는 ${}_3H_3$ 와 같다.

따라서 정답은 $\frac{{}_3H_3}{64}$.

(틀린 풀이)

4개의 숫자 중 하나를 확인한 후 다시 집어넣으므로 같은 숫자를 중복해서 뽑아낼 수 있다. 따라서 세 번 확인한 세 수의 조합의 전체 경우의 수는 ${}_4H_3$ 이다.

~~~~~

위 풀이가 틀린 이유는  ${}_4H_3$ 가지의 원소로 구성되어 있는 표본공간의 근원사건의 기대되는 정도가 각각 다르기 때문이다.

(예를 들어 3이 세 번 확인 되는 기대정도와 1, 2, 3이 한번 씩 확인되는 기대정도가 다르다. 3, 3, 3과 달리 1, 2, 3은 2, 3, 1, 3, 2, 1등의 조합이 있으니까.)

물론 확률의 분자를 계산할 때 위의 기대되는 정도를 보정하기 위한 스킬을 사용해주다면 정답으로 향할 수는 있겠지만, 그걸 연습할 바에 바른 풀이로 푸는 연습을 하는 것이 한  $6.02 \times 10^{23}$ 배 정도 좋다.

구체적인 문제로 확인해보자.

다음은 기대모의고사 가, 나형에 출제되었던 3점 문항이다.

(문제.1) : 같은 것을 포함한 순열 사용

10개의 문자 E, Y, E, C, O, N, T, A, C, T를 배열하여 만들 수 있는 문자열 중 하나를 고를 때, 두 개의 E가 모두 이웃한 문자열을 고를 확률은? [3점]

(해설)

10개의 문자로 만들 수 있는 문자열을 우선 표본공간으로 다 모은 후, 그 표본공간에서 순수하게 하나를 고르는 것이므로 표본공간의 모든 근원사건이 기대되는 정도가 같다. 따라서 표본공간의 원소의 개수인

$\frac{10!}{2!2!}$ 를 E가 두 개 이웃한 문자열의 개수인  $\frac{9!}{2!}$ 에서 나눠주면 정답이 나온다.

## 2. 확률) 같은 것을 다른 것으로 보라.

이번에는 다음과 같은 문제를 풀어보자.

(문제.2)

10개의 문자  $E_1, Y, E_2, C_1, O, N, T_1, A, C_2, T_2$ 를 배열하여 만들 수 있는 문자열 중 하나를 고를 때,  $E_1, E_2$ 가 이웃한 문자열을 고를 확률은?

[3점]

(풀이)

전체 경우의 수는  $10!$ 이다.

$E_1, E_2$ 가 이웃하면  $E_1E_2$  혹은  $E_2E_1$ 으로 이웃한다. ( ${}_2C_1$ )

이 덩어리를 하나의 원소로 보면 문제의 조건을 만족시키는 문자열의 개수는 이 덩어리와 나머지 8개의 문자로 구성된 9개의 문자+덩어리를 나열하는 경우의 수와 같으므로  ${}_2C_1 \times 9!$ 이다. 여기에  $10!$ 을 나누면

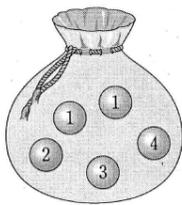
문제.1의 정답과 똑같다.

문제.1에서 등장한 같은 문자들을 본질은 같지만 외형만 다른 문자들로 취급 (ex. E 두 개를 서로 다른  $E_1, E_2$ 로 취급) 한 문제가 문제.2인데, 두 문제의 정답이 같은 것은 결코 우연이 아님을 배워가야 한다.

확률문제에 같은 것이 포함된 것이 있다면, 본질만 같고 외형은 다른 문자들로 취급해서 문제를 풀도록 하자. 훨씬 편하다.

대표 기출문제 (16학년도 9월 수학 B형 15번)

주머니에 1, 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내어 임의로 일렬로 나열하고, 나열된 순서대로 공에 적혀있는 수를  $a, b, c, d$ 라 할 때,  $a \leq b \leq c \leq d$ 일 확률은? [4점]



(풀이)

1, 1, 2, 3, 4을 1, 1', 2, 3, 4로 취급하자.

4개를 꺼내어 ( ${}_5C_4$ ) 임의로 나열하자. (4!)

i)  $a, b, c, d$ 에 1, 1'이 모두 포함되어 있을 때

$a$ 와  $b$ 는 1, 1' 이외의 수가 될 수 없다. (2!)

$c$ 와  $d$ 는 2, 3, 4 중 2개를 골라 큰 것을  $d$ 로 정해주면 된다. ( ${}_3C_2$ )

ii)  $a, b, c, d$ 에 1, 1'중 하나만 포함되어 있을 때,

$a = 1$  or  $1'$  ( ${}_2C_1$ )

$b, c, d$ 는 반드시 2, 3, 4가 되어야 한다. (1)

따라서 정답은  $\frac{2! \times {}_3C_2 + {}_2C_1 \times 1}{{}_5C_4 \times 4!} = \frac{1}{15}$ 이다.

## 3. 경우의 수) 케이스 분류의 이유

(문제)

일렬로 있는 6자리에 여자  $A, B, C$ 와 남자  $E, F, G$ 를 앉힐 때, 여자가 2명 이상 이웃할 경우의 수는?

(해설)

i) 여자가 2명 이웃할 때,

~~~~

ii) 여자가 3명 모두 이웃할 때

~~~~

해설에서 볼 수 있듯이, 위의 문제는

ㄱ. 일렬로 있는 6자리에 여자가 2명 이웃할 경우의 수는?

ㄴ. 일렬로 있는 6자리에 여자가 3명 이웃할 경우의 수는?

두 문제의 정답을 각각 구해서 더한 것과 같다.

위의 예시에서 왜 케이스를 분류해야 하는 이유를 알 수 있을 것이다.

그 이유는 바로 추가조건을 획득함으로써 하나의 문제를 쉬운 여러 문제로 나눠서 풀 수 있기 때문이다.

멋지게 한 번에 푸는 것도 좋다. 하지만 대부분의 문제는 한번에

풀기에는 너무 추상적일뿐더러 실수를 할 가능성도 많다.

따라서 케이스를 잘게 잘게 나눠서 기존의 문제를 쉬운 여러 문제로

나누어 구하는 연습을 꾸준히 할 수 있도록 하자.

(쪼갤 수 있는 최다의 케이스로 나눈 것이 바로 수형도이다.)

필자의 경우 대부분 다음의 기준으로 문제를 푸는 편이다.

i) 문제의 조건의 중심이 되는 것

ex. 여자가 이웃한다. => 여자가 어디서, 몇 명이나 이웃하는지에 대해 케이스를 나눈다.

ii) 다른 것에 비해 원소의 수가 적은 것

ex. 남자 2명과 여자 10명을 ~~~ => 남자 2명을 문제의 조건에 맞게 배열할 수 있는 케이스로 나눈 뒤 여자를 자유롭게 배치한다.

ii)와 같이 적은 것을 먼저 배치하는 것을 조삼모사라고 한다면

많은 것을 먼저 배치하는 것은 조사모삼이라고 할 수 있겠다.

무슨 말이나?

적은 것을 먼저 배치하는 것은 풀이 초반엔 쉽지만 남은 '많은 것'들을 배열하기 어려울 수 있다. 하지만 '많은 것'을 먼저 배치하면 풀이 초반엔 어렵지만 많은 것을 이미 배치했으므로 남은 칸에 '적은 것'을 배치하는 것은 훨씬 간편하다는 말이다.

결론적으로, 그렇다면 케이스를 무엇을 기준으로 나누어야 하는가?

에 대한 100%짜리 정답은 없다.

경우의 수는 다양한 풀이가 가능하므로 유형화 공부를 하는 것보다

본인만의 상황별 대처 알고리즘을 짜는 것이 좋다. 여기서 상황별 대처

알고리즘이란 문제를 봤을 때 A를 우선시해보고, 안되면 B, C를

시도해보자. 라는 식의 알고리즘을 말한다.

이러한 알고리즘이 '케이스를 나누는 기준은 무엇인가?'에 대한 99%의 정답의 역할을 해줄 것이다.)

---

예시문제) 기대모의고사 6평 대비 가형 28번/나형 29번 (난이도 上)

0,1,2 중에서 중복을 허락하여 여섯 수를 택해 일렬로 배열하여 여섯 자리 자연수를 만들 때, 다음 조건을 만족시키는 자연수  $N$ 의 개수를 구하시오. [4점]

- (가) 0은 2번 사용되었다.  
(나) 인접한 자리의 세 수의 합이 3이상이다.  
(예를 들어 201021은  $0+1+0=1$ 이므로  $N$ 에 포함되지 않는다.)

(hint : 케이스 나누는 기준 : 문제의 조건에 중심이 되는 것=0)  
해설은 기대모의고사 해설지를 참고하세요.