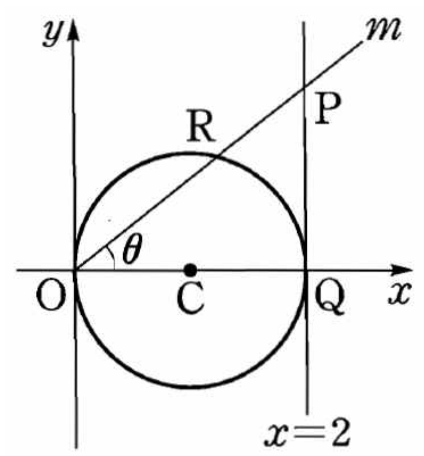
5일차 과제

1. $\lim_{x\to\infty} x^{\circ}\sin\frac{1}{x}$ 의 값은?

① 0　　② $\frac{\pi}{180}$　　③ $\frac{1}{\pi}$

④ 1　　⑤ $\frac{180}{\pi}$

2. 아래쪽 그림과 같이 중심이 $\mathrm{C}(1,\ 0)$이고 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 직선 $x=2$가 원점 O를 지나고 기울기가 양수인 직선 m과 만나는 점을 P, x축과 만나는 점을 Q라 하고, 직선 m이 원과 만나는 원점이 아닌 점을 R라 하자. 직선 m이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ, 호 RQ의 길이를 l이라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{PR}}}{l^2}$의 값을 구하여라.



3. 함수 $f(x)=4\cos x-\cos 2x\ \ (0<x<2\pi)$는 $x=a$에서 극솟값 b를 갖는다. 이때 ab의 값은?

① -5π　　② -2π　　③ 0

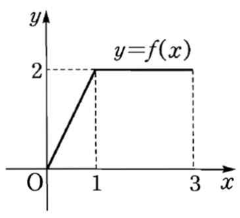
④ 2π　　⑤ 5π

4. 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점 P에서의 접선과 x축 및 두 직선 $x=2,\ x=6$ 으로 둘러싸인 사다리꼴의 넓이의 최솟값을 구하여라.

5. 정적분 $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ 의 값과 반지름의 길이가 r인 원의 넓이가 같을 때, r의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$
④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

6. $0 \le x \le 3$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 정적분 $\int_0^2 e^x f(x+1)\,dx$의 값을 구하면?



① $2e^2-2$ ② $2e^2$ ③ $2e^2+1$
④ $3e^2-2$ ⑤ $3e^2-1$

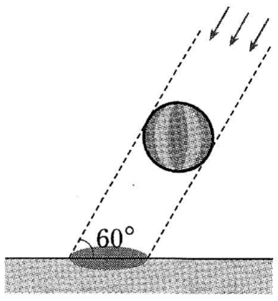
7. 곡선 $y=\ln(a-x)$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1일 때, 상수 a의 값은? (단, $a>1$)

① $\frac{1}{2}e$ ② e ③ $2e$
④ e^2 ⑤ $2e^2$

8. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}e^x+1$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,

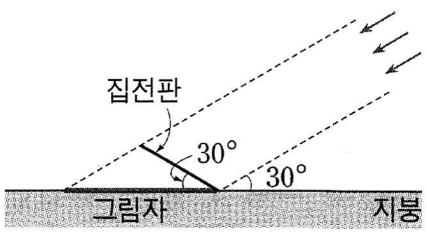
$\int_0^1 f(x)dx + \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}e+1} g(x)dx$의 값을 구하여라.

9. 아래쪽 그림과 같이 구 모양의 애드벌룬이 하늘에 떠 있다. 태양이 지면과 $60°$의 각도로 비출 때, 지면 위에 생긴 애드벌룬의 그림자의 넓이는 $8\sqrt{3}\pi m^2$이다. 이때 애드벌룬의 반지름의 길이는 몇 m인지 구하여라.

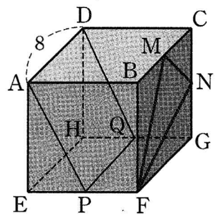


10. 아래쪽 그림은 지붕과 $30°$의 각을 이루면서 설치되어 있는 태양열 집전판과 그 그림자를 나타낸 것이다. 지붕이 태양 빛과 이루는 각의 크기가 $30°$일 때, 지붕 위에 생긴 집전판의 그림자의 넓이가 21이다. 태양열 집전판의 넓이는?

① $3\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ $5\sqrt{3}$
④ $6\sqrt{3}$ ⑤ $7\sqrt{3}$



11. 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 8인 정육면체에서 네 모서리 EF, GH, BC, CG의 중점을 각각 P, Q, M, N이라 할 때, $\triangle FNM$의 평면 $APQD$ 위로의 정사영의 넓이는?



① $\frac{24}{5}$ ② $\frac{24\sqrt{2}}{5}$ ③ $\frac{48}{5}$
④ $\frac{24\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{48\sqrt{5}}{5}$

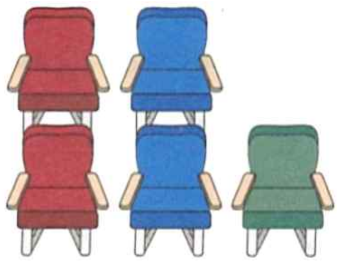
12. 점 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 4)$에서 나온 빛에 의하여 xy평면에 구 $x^2+y^2+z^2-2z=0$의 그림자가 생긴다. 이 그림자의 넓이를 구하여라.

13. 두 구 $x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z-6=0$, $x^2+y^2+z^2-4x-10y-2z+a=0$이 만나지 않도록 하는 자연수 a의 개수는?

① 14 ② 15 ③ 16
④ 17 ⑤ 18

14. 구 $x^2+y^2+z^2+kx-6y+10z+18=0$이 xy평면과 만나서 생기는 원의 넓이를 S, yz평면과 만나서 생기는 원의 넓이를 S'이라 하자. $S:S'=3:1$일 때, 상수 k에 대하여 k^2의 값을 구하여라.

15. 아래쪽 그림과 같은 좌석에 다섯 명의 학생이 앉아 발레 공연의 일부를 관람했다. 10분간의 휴식 시간 후 2부 공연을 관람하기 위해 임의로 좌석에 앉을 때, 한 사람만 1부 공연에 앉은 열과 같은 열의 좌석에 앉게 되는 방법의 수를 구하여라.



16. 각 자리의 숫자의 합이 4인 자연수를 작은 수부터 순서대로 나열했을 때, 가장 작은 다섯 자리 자연수는 몇 번째 수인지 구하여라.

17. 지우와 혜리가 각각 정답이 한 개인 오지선다형 문제 5개를 풀었는데 혜리는 1번 문제부터 5번 문제까지의 답을 각각 1, 2, 3, 4, 5로 택했고, 지우는 답을 모두 3으로 택했다. 이때 지우와 혜리 둘 다 3문제씩 맞히는 경우의 수를 구하여라.

18. 전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 조건을 모두 만족시키는 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는?

> (가) $A\cap B=\varnothing$
> (나) $n(A)=n(B)=2$
> (다) 집합 A의 원소 중 가장 큰 수는 집합 B의 원소 중 가장 큰 수보다 크다.

① 70 ② 84 ③ 90
④ 96 ⑤ 105

19. 10명의 회원으로 구성된 동아리에서 각 회원이 동아리 모임에 참석할 확률은 $\frac{1}{2}$이다. 구성원의 $\frac{4}{5}$ 이상이 참석할 때 동아리 활동을 진행할 수 있다고 하면 동아리 활동이 진행될 확률이 $\frac{n}{2^7}$이다. 이때 자연수 n의 값을 구하여라.

20. 한 개의 주사위를 60번 던질 때, 6의 약수가 k번 나올 확률을 $\mathrm{P}(k)$라 하자. 이때 $\sum_{k=1}^{30}\{\mathrm{P}(2k-1)-\mathrm{P}(2k)\}$의 값을 구하여라.

5일차 과제

1) 2) 3) 4) 5) 6) 7) 8)
9) 10) 11) 12) 13) 14)
15) 16) 17) 18) 19) 20)

1) **정답** ②

$x^{\circ}=\dfrac{\pi}{180}x$ 이므로

$$\lim_{x\to\infty}x^{\circ}\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{180}x\sin\frac{1}{x}\qquad\cdots\cdots㉠$$

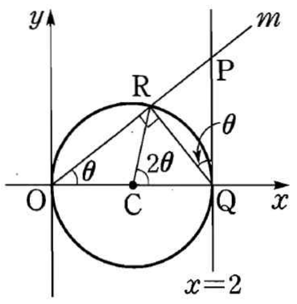
$\dfrac{1}{x}=t$ 로 놓으면 $x\to\infty$ 일 때 $t\to0$ 이므로 ㉠은

$$\lim_{t\to0}\frac{\pi}{180}\cdot\frac{\sin t}{t}=\frac{\pi}{180}\cdot1=\frac{\pi}{180}$$

2) **정답** $\dfrac{1}{2}$

[전략] $\overline{\mathrm{RC}}$, $\overline{\mathrm{RQ}}$ 를 그은 후 두 직각삼각형 POQ, PRQ 에서 변의 길이를 삼각함수로 나타낸다.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{RC}}$, $\overline{\mathrm{RQ}}$ 를 그으면



$\angle\mathrm{RCQ}=2\theta$ 이므로 부채꼴 RCQ 에서

$l=2\theta$

또 $\triangle\mathrm{PRQ}\backsim\triangle\mathrm{PQO}$ 이므로

$\angle\mathrm{PQR}=\angle\mathrm{POQ}=\theta$

직각삼각형 POQ 에서

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{OQ}}\tan\theta=2\tan\theta$

직각삼각형 PRQ 에서

$$\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{PQ}}\sin\theta=2\tan\theta\sin\theta=\frac{2\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{\mathrm{PR}}}{l^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\dfrac{2\sin^2\theta}{\cos\theta}}{4\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{2\cos\theta}$$

$$=1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

3) **정답** ①

$f'(x)=-4\sin x+2\sin2x=-4\sin x+4\sin x\cos x$

$\quad=4\sin x(\cos x-1)$

$f'(x)=0$ 에서 $\sin x=0$ 또는 $\cos x=1$

$\therefore\ x=\pi\ (\because\ 0<x<2\pi)$

x	(0)	$\cdots$	π	$\cdots$	(2π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	-5	↗	

따라서 $f(x)$ 는 $x=\pi$ 에서 극솟값 -5 를 가지므로

$a=\pi$, $b=-5$ $\therefore\ ab=-5\pi$

[다른 풀이]

$f'(x)=-4\sin x+2\sin2x$

$f''(x)=-4\cos x+4\cos2x$

$f'(x)=0$ 에서 $x=\pi\ (\because\ 0<x<2\pi)$

이때 $f''(\pi)=8>0$ 이므로 $f(x)$ 의 극솟값은

$f(\pi)=-5$

따라서 $a=\pi$, $b=-5$ 이므로 $ab=-5\pi$

4) **정답** 8

[전략]

$a>0$, $b>0$ 일 때, $a+b\ \geq\ 2\sqrt{ab}$ (등호는 $a=b$ 일 때 성립) 임을 이용한다.

[풀이]

$f(x)=\sqrt{x}$ 로 놓으면 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

점 P의 좌표를 $(t,\ \sqrt{t})$ $(t>0)$ 라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ 이므로 접선의 방정식은 $y-\sqrt{t}=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}(x-t)$

$$\therefore\ y=\frac{1}{2\sqrt{t}}x+\frac{\sqrt{t}}{2}\qquad\cdots\cdots㉠$$

$x=2$ 를 ㉠에 대입하면 $y=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\cdot2+\dfrac{\sqrt{t}}{2}=\dfrac{2+t}{2\sqrt{t}}$

$x=6$ 을 ㉠에 대입하면 $y=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\cdot6+\dfrac{\sqrt{t}}{2}=\dfrac{6+t}{2\sqrt{t}}$

따라서 사다리꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2+t}{2\sqrt{t}}+\frac{6+t}{2\sqrt{t}}\right)\cdot(6-2)=2\cdot\frac{4+t}{\sqrt{t}}=2\left(\frac{4}{\sqrt{t}}+\sqrt{t}\right)$$

이때, $\dfrac{4}{\sqrt{t}}>0$, $\sqrt{t}>0$ 에서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{4}{\sqrt{t}}+\sqrt{t}\geq2\sqrt{\frac{4}{\sqrt{t}}\cdot\sqrt{t}}=4$$

(단, 등호는 $t=4$ 일 때 성립)

이므로 사다리꼴의 넓이의 최솟값은

$2\cdot4=8$

5) **정답** ②

$x=2\sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$ 로 놓으면 $\dfrac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$

또한 $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=2$ 일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 이므로

$$\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2\theta}\cdot2\cos\theta d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos^2\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cdot\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta$$

$$=\big[\,2\theta+\sin2\theta\,\big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi$$

따라서 반지름의 길이가 r 인 원의 넓이가 π 이므로

$\pi r^2=\pi$ $\therefore\ r=1\ (\because\ r>0)$

[다른 풀이]

$y=\sqrt{4-x^2}$ 의 그래프는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 2인 원의 위쪽 반원이므로 $\displaystyle\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx$ 의 값은 반지름의 길이가 2인 원의 넓이의 $\dfrac{1}{4}$ 과 같다.

$$\therefore\ \int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot2^2=\pi$$

따라서 $\pi r^2=\pi$ 이므로 $r=1\ (\because\ r>0)$

6) **정답** ①

[전략] $x+1=t$ 로 치환하여 치환적분법을 이용한다.

[풀이]

$x+1=t$ 로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=1$

또한 $x=0$ 일 때 $t=1$, $x=2$ 일 때 $t=3$ 이므로

$$\int_0^2e^xf(x+1)\,dx=\int_1^3e^{t-1}f(t)\,dt$$

이때 $1\leq t\leq3$ 에서 $f(t)=2$ 이므로

$$\int_1^3e^{t-1}f(t)\,dt=\int_1^32e^{t-1}dt=\Big[2e^{t-1}\Big]_1^3=2e^2-2$$

[다른 풀이]

함수 $y=f(x+1)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로

$$f(x+1)=\begin{cases}2x+2 & (-1\leq x\leq0)\\ 2 & (0\leq x\leq2)\end{cases}$$

$$\therefore\ \int_0^2e^xf(x+1)\,dx=\int_0^22e^x\,dx=\Big[2e^x\Big]_0^2=2e^2-2$$

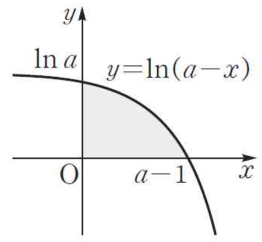
7) **정답** ②

$y=\ln(a-x)$ 에서 $a-x=e^y$

$\therefore\ x=a-e^y$

오른쪽 그림에서 어두운 부분의 넓이는

$$\int_0^{\ln a}(a-e^y)\,dy$$
$$=\Big[ay-e^y\Big]_0^{\ln a}$$
$$=a\ln a-a+1$$



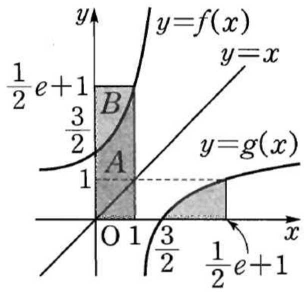
따라서 $a\ln a-a+1=1$이므로

$a(\ln a-1)=0$, $\quad \ln a-1=0\,(\because\ a>1)$

$\ln a=1 \qquad \therefore\ a=e$

8) **정답** $\frac{1}{2}e+1$

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같이 $\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}e+1}g(x)dx$의 값은 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 직선 $y=\frac{1}{2}e+1$로 둘러싸인 도형의 넓이, 즉 B와 같다.

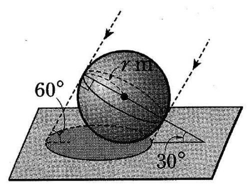


$$\therefore\ \int_0^1 f(x)dx+\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}e+1}g(x)dx=A+B=\frac{1}{2}e+1$$

9) 답 $2\sqrt{3}$

[해설]

애드벌룬의 반지름의 길이를 r m 라 하고 오른쪽 그림과 같이 애드벌룬을 지면과 접하도록 이동시키면 태양 빛과 수직으로 만나는 구의 지름이 지면과 이루는 각의 크기가 30° 이다. •40%



이때 $8\sqrt{3}\pi\cos30^\circ=\pi r^2$이므로

$$8\sqrt{3}\pi\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\pi r^2$$

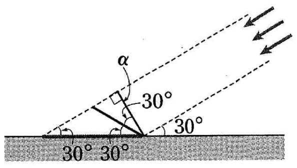
$r^2=12 \qquad \therefore r=2\sqrt{3}$

10) 답 ⑤

[해설]

오른쪽 그림과 같이 태양 빛과 수직인 평면을 α라 하면 평면 α가 지붕과 이루는 각의 크기는 60° 이다.

또 집전판의 평면 α 위로의 정사영은 집전판의 그림자의 평면 α 위로의 정사영과 같다.



이때 집전판의 넓이를 S, 정사여의 넓이를 S'이라 하면

$S'=S\cos30^\circ$ ⋯⋯ ㉠

한편 집전판의 그림자의 넓이가 21이므로

$S'=21\cos60^\circ$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad S\cos30^\circ=21\cos60^\circ$

$$\therefore S=21\times\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=7\sqrt{3}$$

11) 답 ⑤

[해설]

(평면 $AEHD$) // (평면 FNM) 이므로 삼각형 FNM과 평면 $APQD$가 이루는 각의 크기는 평면 $AEHD$와 평면 $APQD$가 이루는 각의 크기와 같다.

$\overline{EP}=4$이므로

$$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AE}^2+\overline{EP}^2}=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$$

$\angle EAP=\theta$라 하면

$$\cos\theta=\frac{\overline{AE}}{\overline{AP}}=\frac{8}{4\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

이때

$$\triangle FNM=\square BFGC-(\triangle BFM+\triangle FGN+\triangle CMN)$$
$$=8\times8-\left(\frac{1}{2}\times4\times8+\frac{1}{2}\times8\times4+\frac{1}{2}\times4\times4\right)$$
$$=64-40=24$$

이므로 $\triangle FNM$의 평면 $APQD$ 위로의 정사영의 넓이는

$$\triangle FNM\cos\theta=24\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{48\sqrt{5}}{5}$$

12) [정답]

$x^2+y^2+z^2-2z=0$에서 $x^2+y^2+(z-1)^2=1$

구의 중심을 C라 하면 C$(0,\ 0,\ 1)$ [20 % 배점]

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 구의 접선 PA에 내린 수선의 발을 H라 하면 △PHC에서

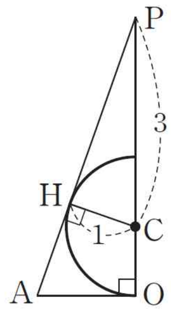
$\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$ [30 % 배점]

이때 △PAO∽△PCH이므로

$\overline{\mathrm{PO}}:\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{HC}}$

$4:2\sqrt{2}=\overline{\mathrm{OA}}:1$

$\therefore\ \overline{OA}=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ [30 % 배점]



따라서 그림자는 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원이므로 구하는 그림자의 넓이는 $\pi(\sqrt{2})^2=2\pi$ [20 % 배점]

13) [정답] 15

$x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z-6=0$에서

$(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=9$

이므로 중심의 좌표가 $(-1,\ -1,\ -1)$이고 반지름의 길이가 3인 구이다.

또, $x^2+y^2+z^2-4x-10y-2z+a=0$

$(x-2)^2+(y-5)^2+(z-1)^2=30-a$이므로 중심의 좌표가 $(2,\ 5,\ 1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{30-a}$ 인 구이다.

두 구의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(2+1)^2+(5+1)^2+(1+1)^2}=7$

$0<\sqrt{30-a}<6$이므로 두 구가 만나지 않으려면

$3+\sqrt{30-a}<7,\ \sqrt{30-a}<4$

$0<30-a<16 \qquad \therefore\ 14<a<30$

따라서 구하는 자연수 a는 15, 16, 17, ⋯, 29의 15개이다.

[참고]

$|3-\sqrt{30-a}|>7$이어도 두 구는 만나지 않지만 이를 만족시키는 자연수 a는 존재하지 않는다.

14) [정답] 228

$x^2+y^2+z^2+kx-6y+10z+18=0$에서

$$\left(x+\frac{k}{2}\right)^2+(y-3)^2+(z+5)^2=\frac{k^2}{4}+16 \quad \cdots\cdots ㉠$$

[20% 배점]

xy평면 위의 점은 z좌표가 0이므로 $z=0$을 ㉠에 대입하면

$\left(x+\frac{k}{2}\right)^2+(y-3)^2=\frac{k^2}{4}-9$ [20% 배점]

yz평면 위의 점은 x좌표가 0이므로 $x=0$을 ㉠에 대입하면

$(y-3)^2+(z+5)^2=16$ [20% 배점]

즉, $S=\left(\frac{k^2}{4}-9\right)\pi$, $S'=16\pi$이므로

$\left(\frac{k^2}{4}-9\right)\pi:16\pi=3:1$ [20% 배점]

$48\pi=\left(\frac{k^2}{4}-9\right)\pi \quad \therefore\ k^2=228$ [20% 배점]

15) **정답** 36

[전략] 1부 공영의 좌석을 지정하고 2부 공연 때 같은 열에 앉는 경우를 나눈다.

[풀이]

오른쪽 그림과 같이 1부 공연에 다섯 명의 학생이 앉은 좌석을 각각 A_1, A_2, B_1, B_2, C라 하자.

A_1	B_1	
A_2	B_2	C
A열	B열	C열

(ⅰ) 1부 공연 때 A열에 앉은 학생 중에서 한 명이 2부 공연에서도 A열에 앉는 경우

A_1에 앉았던 학생이 A열에 앉으면 나머지 학생들은 오른쪽 그림과 같이 앉을 수 있다.

A_1	A_2	
B_1	C	B_2
A열	B열	C열

이때 A_1과 A_2, B_1는 자리를 바꿀 수 있고, 같은 열에 앉은 학생들끼리도 자리를 바꿀 수 있으므로 가능한 방법의 수는

$2!\cdot2!\cdot2!\cdot2!=16$

(ⅱ) 1부 공연 때 B열에 앉은 학생 중에서 한 명이 2부 공연에서도 B열에 앉는 경우

B_1에 앉았던 학생이 B열에 앉으면 나머지 학생들은 오른쪽 그림과 같이 앉을 수 있다.

따라서 가능한 방법의 수는 (ⅰ)과 같이

$2!\cdot2!\cdot2!\cdot2!=16$

B_2	B_1	
C	A_1	A_2
A열	B열	C열

(ⅲ) 1부 공연 때 C열에 앉은 학생 한 명이 2부 공연에서도 C열에

앉는 경우

C에 앉았던 학생이 C열에 앉으면 나머지 학생들은 오른쪽 그림과 같이 앉을 수 있다.

이때 A_1과 A_2, B_1과 B_2는 자리를 바꿀 수 있으므로 가능한 방법의 수는

A열	B열	C열
B_1	A_1	
B_2	A_2	C

$$2!\cdot 2!=4$$

이상에서 구하는 방법의 수는

$$16+16+4=36$$

16) **정답** 36번째

[전략] 각 자리의 숫자의 합이 4가 되는 네 자리 자연수의 각 자리의 숫자의 순서쌍을 찾는다.

[풀이]

각 자리의 숫자의 합이 4인 네 자리 이하의 자연수는 다음의 숫자들을 나열하여 만들 수 있다.

4, 0, 0, 0 또는 3, 1, 0, 0 또는 2, 2, 0, 0 또는 2, 1, 1, 0 또는 1, 1, 1, 1

(ⅰ) 4, 0, 0, 0으로 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수의 개수는

$$\frac{4!}{3!}=4$$

(ⅱ) 3, 1, 0, 0으로 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수의 개수는

$$\frac{4!}{2!}=12$$

(ⅲ) 2, 2, 0, 0으로 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수의 개수는

$$\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$$

(ⅳ) 2, 1, 1, 0으로 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수의 개수는

$$\frac{4!}{2!}=12$$

(ⅴ) 1, 1, 1, 1로 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수의 개수는

1

이상에서 각 자리의 숫자의 합이 4인 네 자리 이하의 자연수의 개수는

$$4+12+6+12+1=35$$

따라서 구하는 자연수는 36번째 수이다.

17) **정답** 6

[전략] 재석이와 명수가 푼 문제 중에서 3번 문제만 답이 3으로 일치함을 이용한다.

[풀이]

재석이과 명수 둘 다 3문제씩 맞히기 위해서는 3번의 정답은 반드시 3이어야 한다.

따라서 재석이는 3번 문제를 제외한 나머지 4개의 문제 중에서 2문제를 맞히고, 명수는 3번 문제와 재석이가 맞힌 2문제를 제외한 나머지 2문제 중에서 2문제를 맞혀야 하므로 구하는 경우의 수는

$$_4C_2\cdot {}_2C_2=6\cdot 1=6$$

18) **정답** ⑤

[전략] 집합 U의 원소 7개 중에서 4개를 뽑으면 가장 큰 수는 집합 A의 원소이다.

[풀이]

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7의 7개의 수 중에서 4개를 뽑으면 그 중에 가장 큰 수는 집합 A의 원소가 된다.

나머지 3개의 수 중에서 집합 A의 다른 한 원소를 택하면 집합 B의 두 원소가 정해지므로 구하는 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는

$$_7C_4\cdot {}_3C_1=35\cdot 3=105$$

19) **정답** 7

$10\times\dfrac{4}{5}=8$(명)이므로 8명 이상 참석해야 동아리 활동을 진행할 수 있다. • 20 %

(ⅰ) 8명이 참석할 확률은 $_{10}C_8\left(\dfrac{1}{2}\right)^8\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{45}{2^{10}}$ • 20 %

(ⅱ) 9명이 참석할 확률은 $_{10}C_9\left(\dfrac{1}{2}\right)^9\left(\dfrac{1}{2}\right)^1=\dfrac{10}{2^{10}}$ • 20 %

(ⅲ) 10명이 참석할 확률은 $_{10}C_{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^0=\dfrac{1}{2^{10}}$ • 20 %

이상에서 동아리 활동이 진행될 확률은

$$\frac{45}{2^{10}}+\frac{10}{2^{10}}+\frac{1}{2^{10}}=\frac{56}{2^{10}}=\frac{7}{2^7}$$

$\therefore\ n=7$ • 20 %

20) **정답** 0

[전략] 독립시행의 확률을 이용하여 $\mathrm{P}(k)$를 구한 다음 이항정리를 이용한다.

[풀이]

주사위를 한 번 던질 때, 6의 약수가 나올 확률이 $\dfrac{2}{3}$이므로

$$\mathrm{P}(k)={}_{60}C_k\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{60-k}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 60)$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{30}\{\mathrm{P}(2k-1)-\mathrm{P}(2k)\}$$

$$=\{\mathrm{P}(1)-\mathrm{P}(2)\}+\{\mathrm{P}(3)-\mathrm{P}(4)\}+\cdots+\{\mathrm{P}(59)-\mathrm{P}(60)\}$$

$$=\left\{{}_{60}C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^{59}-{}_{60}C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{58}\right\}$$

$$+\left\{{}_{60}C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^{57}-{}_{60}C_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^{56}\right\}$$

$$+\cdots+\left\{{}_{60}C_{59}\left(\frac{2}{3}\right)^{59}\left(\frac{1}{3}\right)^1-{}_{60}C_{60}\left(\frac{2}{3}\right)^{60}\left(\frac{1}{3}\right)^0\right\}$$

$$={}_{60}C_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^{60}-\left\{{}_{60}C_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^{60}-{}_{60}C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^{59}\right.$$

$$\left.+{}_{60}C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{58}-\cdots+{}_{60}C_{60}\left(\frac{2}{3}\right)^{60}\left(\frac{1}{3}\right)^0\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^{60}-\sum_{k=0}^{60}{}_{60}C_k\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(-\frac{1}{3}\right)^{60-k}$$

$$=\left(\frac{1}{30}\right)^{60}-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)^{60}$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^{60}-\left(\frac{1}{3}\right)^{60}=0$$

[SSEN 보충학습] 이항정리

자연수 n에 대하여 $(a+b)^n=\displaystyle\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r a^{n-r}b^r$