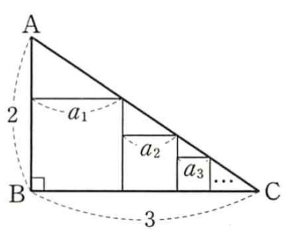
5일차 과제

1. A 도시의 인구는 매년 일정한 비율로 증가하여 10 년 후에는 36 만 명, 20 년 후에는 81 만 명이 될 것으로 예상된다. 이때 A 도시의 15년 후의 인구는 얼마가 될 것으로 예상할 수 있는가?

① 51 만 명 ② 53 만 명 ③ 54 만 명
④ 55 만 명 ⑤ 57 만 명

2. 오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{BC}}=3$이고 $\angle\mathrm{B}=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에 내접하는 정사각형의 한 변의 길이를 차례대로 a_1, a_2, a_3, $\cdots$이라 할 때, $\frac{1}{2}a_9$의 값을 구하여라.



3. 세 수 $\sqrt{3\sqrt[3]{3}}$, $\sqrt{4\sqrt[3]{2}}$, $\sqrt[3]{5\sqrt{5}}$ 중에서 가장 작은 수를 a, 가장 큰 수를 b라 할 때, 부등식 $a < \sqrt[6]{n} < b$를 만족시키는 자연수 n의 개수는?

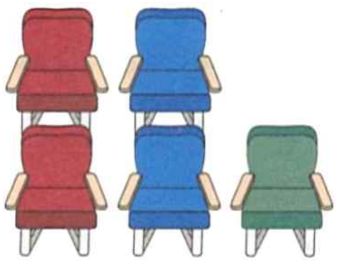
① 42 ② 43 ③ 44
④ 45 ⑤ 46

4. 두 실수 x, y에 대하여

$$M(x,\ y)=\begin{cases} x & (x \ge y) \\ y & (x < y) \end{cases},\quad m(x,\ y)=\begin{cases} y & (x > y) \\ x & (x \le y) \end{cases}$$

로 정의하자. $a=\sqrt[4]{\sqrt{5}}$, $b=\sqrt[6]{3}\times\sqrt[12]{2}$, $c=\sqrt{\sqrt[3]{4}}$일 때, $M(a,\ m(b,\ c))$의 값을 구하여라.

5. 아래쪽 그림과 같은 좌석에 다섯 명의 학생이 앉아 발레 공연의 일부를 관람했다. 10분간의 휴식 시간 후 2부 공연을 관람하기 위해 임의로 좌석에 앉을 때, 한 사람만 1부 공연에 앉은 열과 같은 열의 좌석에 앉게 되는 방법의 수를 구하여라.



6. 각 자리의 숫자의 합이 4인 자연수를 작은 수부터 순서대로 나열했을 때, 가장 작은 다섯 자리 자연수는 몇 번째 수인지 구하여라.

7. 지우와 혜리가 각각 정답이 한 개인 오지선다형 문제 5개를 풀었는데 혜리는 1번 문제부터 5번 문제까지의 답을 각각 1, 2, 3, 4, 5로 택했고, 지우는 답을 모두 3으로 택했다. 이때 지우와 혜리 둘 다 3문제씩 맞히는 경우의 수를 구하여라.

8. 전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 조건을 모두 만족시키는 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는?

(가) $A \cap B = \varnothing$
(나) $n(A)=n(B)=2$
(다) 집합 A의 원소 중 가장 큰 수는 집합 B의 원소 중 가장 큰 수보다 크다.

① 70 ② 84 ③ 90
④ 96 ⑤ 105

9. 10명의 회원으로 구성된 동아리에서 각 회원이 동아리 모임에 참석할 확률은 $\frac{1}{2}$이다. 구성원의 $\frac{4}{5}$ 이상이 참석할 때 동아리 활동을 진행할 수 있다고 하면 동아리 활동이 진행될 확률이 $\frac{n}{2^7}$이다. 이때 자연수 n의 값을 구하여라.

10. 한 개의 주사위를 60번 던질 때, 6의 약수가 k번 나올 확률을 $\mathrm{P}(k)$라 하자. 이때 $\sum_{k=1}^{30}\{\mathrm{P}(2k-1)-\mathrm{P}(2k)\}$의 값을 구하여라.

11. 수열 $\{a_n\}$이 $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-2}{2a_n+1}=3$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?

① $-\frac{5}{3}$　② $-\frac{3}{2}$　③ $-\frac{2}{3}$
④ $-\frac{3}{5}$　⑤ $-\frac{1}{2}$

12. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=7,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+3\ (n=1,2,3,\cdots)$$

으로 정의될 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?

① 2　② 4　③ 6
④ 8　⑤ 10

13. 자연수 n에 대하여 수직선 위의 점 A_n의 좌표를 x_n이라 하자. $\mathrm{A}_1(2)$, $\mathrm{A}_2(7)$이고, 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$을 $2:3$으로 내분하는 점을 A_{n+2}라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$의 값은?

① 4　② $\frac{19}{4}$　③ 5　④ $\frac{41}{8}$　⑤ $\frac{21}{4}$

14. 어느 공원의 잔디는 일주일에 4cm씩 자라고 매주 월요일 오전 10시에 잔디의 길이의 $\frac{3}{4}$을 잘라낸 다음 남은 잔디의 길이를 측정한다고 한다. 최초로 측정한 잔디의 길이가 12cm이고 n번째 측정한 잔디의 길이를 $a_n$cm라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$의 값은?

① 1　② $\frac{4}{3}$　③ $\frac{3}{2}$　④ $\frac{7}{4}$　⑤ 2

15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|3x-a|-b}{2x}=\alpha$일 때, 상수 α의 값은?
(단, a, b는 상수이고, $a>0$이다.)

① $-\frac{3}{2}$　② -1　③ 1　④ $\frac{3}{2}$　⑤ 2

16. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{f(a+h)}-\frac{1}{f(a)}\right\}$을 $f(a)$, $f'(a)$를 이용하여 나타내면?

① $-\frac{f'(a)}{\{f(a)\}^2}$　② $\frac{f'(a)}{\{f(a)\}^2}$　③ $\frac{f'(a)}{f(a)}$　④ $-\frac{f'(a)}{f(a)}$　⑤ $\frac{f(a)}{f'(a)}$

17. 구간 $[-3,\ 0]$에서 함수 $f(x)=-x^4+6x^2-8x+3$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은?

① 24 ② 25 ③ 26
④ 27 ⑤ 28

18. 곡선 $y=-x^2+3x\ (0<x<3)$위의 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 삼각형 OPH의 넓이의 최댓값은? (단, O는 원점이다.)

① $\frac{2}{3}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

19. 함수 $f(x)=x^3-3x+1$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프에서 극대가 되는 점을 A, 극소가 되는 점을 B라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}$를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표를 구하여라.

20. 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+3}{x-1}=0,\ \lim_{x\to5}\frac{f(x)-4}{x-5}=0$$

을 만족시킬 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(x)$는 $x=3$의 좌우에서 증가하다가 감소한다.
ㄴ. $f(x)$는 $x=5$에서 극댓값을 갖는다.
ㄷ. 방정식 $f(x)=1$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1) 2) 3) 4)

5) 6) 7) 8) 9) 10)

11) 12) 13) 14) 15) 16) 17) 18) 19) 20)

---

1) [정답] ③

A 도시의 올해 인구를 a, 인구의 증가율을 r 라 하면 n 년 후의 인구는

$a(1+r)^n$ (명)

10 년 후의 인구가 36 만 명이므로

$a(1+r)^{10} = 3.6\times10^5$ ······ ㉠

20 년 후의 인구가 81 만 명이므로

$a(1+r)^{20} = 8.1\times10^5$ ······ ㉡

㉡÷㉠ 을 하면 $(1+r)^{10} = \dfrac{9}{4}$ ······ ㉢

$\therefore\ (1+r)^5 = \dfrac{3}{2}$

㉢ 을 ㉠ 에 대입하면 $\dfrac{9}{4}a = 3.6\times10^5$

$\therefore\ a = 1.6\times10^5$

따라서 15 년 후의 인구는

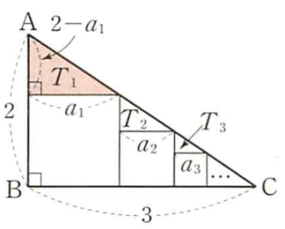
$a(1+r)^{15} = 1.6\times10^5\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^3 = 5.4\times10^5$ (명)

이므로 54 만 명으로 예상할 수 있다.

2) [정답] $2\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^9$

[전략] 삼각형의 닮음비를 이용하여 수열 $\{a_n\}$이 등비수열임을 알고 공비를 구한다.

[풀이] 오른쪽 그림의 색칠한 삼각형 T_1과 삼각형 ABC는 닮음이므로



$(2-a_1) : a_1 = \overline{AB} : \overline{BC} = 2 : 3$

$6-3a_1 = 2a_1$

$\therefore\ a_1 = \dfrac{6}{5}$ [30%]

삼각형 T_2와 삼각형 ABC는 닮음이므로

$(a_1-a_2) : a_2 = 2 : 3$에서 $3a_1-3a_2 = 2a_2$

$\therefore\ a_2 = \dfrac{3}{5}a_1 = \dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{6}{5}$

같은 방법으로 $(a_2-a_3) : a_3 = 2 : 3$에서

$3a_2-3a_3 = 2a_3 \quad \therefore\ a_3 = \dfrac{3}{5}a_2 = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2\cdot\dfrac{6}{5}$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{6}{5}$, 공비가 $\dfrac{3}{5}$인 등비수열이므로

$a_n = \dfrac{6}{5}\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}$ [60%]

$\therefore\ \dfrac{1}{2}a_9 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{6}{5}\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^8 = \left(\dfrac{3}{5}\right)^9$ [10%]

3) [정답] ⑤

참고 $\sqrt{3\sqrt[3]{3}} = \sqrt{\sqrt[3]{3^3\times3}} = \sqrt[6]{81}$, $\sqrt{4\sqrt[3]{2}} = \sqrt{\sqrt[3]{4^3\times2}} = \sqrt[6]{128}$, $\sqrt[3]{5\sqrt{5}} = \sqrt[3]{\sqrt{5^2\times5}} = \sqrt[6]{125}$ 에서 $\sqrt{3\sqrt[3]{3}} < \sqrt[3]{5\sqrt{5}} < \sqrt{4\sqrt[3]{2}}$ 이므로

$a = \sqrt{3\sqrt[3]{3}} = \sqrt[6]{81}$, $b = \sqrt{4\sqrt[3]{2}} = \sqrt[6]{128}$

따라서 부등식 $\sqrt[6]{81} < \sqrt[6]{n} < \sqrt[6]{128}$ 에서 $81 < n < 128$이므로 자연수 n은 82, 83, 84, ⋯, 127의 46개다.

4) [정답] $\sqrt[3]{2}$

참고 $a = \sqrt[4]{\sqrt{5}} = \sqrt[8]{5} = \sqrt[24]{5^3} = \sqrt[24]{125}$

$b = \sqrt[6]{3}\times\sqrt[12]{2} = \sqrt[12]{3^2}\times\sqrt[12]{2} = \sqrt[12]{18} = \sqrt[24]{18^2} = \sqrt[24]{324}$

$c = \sqrt{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[6]{4} = \sqrt[24]{4^4} = \sqrt[24]{256}$

따라서 $\sqrt[24]{125} < \sqrt[24]{256} < \sqrt[24]{324}$ 이므로 $a < c < b$

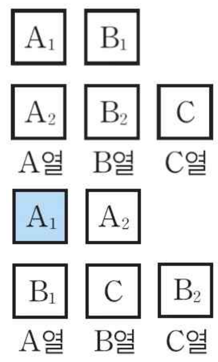
$\therefore\ M(a, m(b, c)) = M(a, c) = c = \sqrt{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[3]{2}$

5) **정답** 36

[전략] 1부 공영의 좌석을 지정하고 2부 공연 때 같은 열에 앉는 경우를 나눈다.

[풀이]

오른쪽 그림과 같이 1부 공연에 다섯 명의 학생이 앉은 좌석을 각각 A_1, A_2, B_1, B_2, C라 하자.



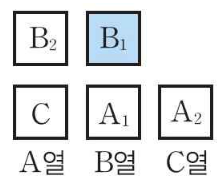
(ⅰ) 1부 공연 때 A열에 앉은 학생 중에서 한 명이 2부 공연에서도 A열에 앉는 경우

A_1에 앉았던 학생이 A열에 앉으면 나머지 학생들은 오른쪽 그림과 같이 앉을 수 있다.

이때 A_1과 A_2, B_1는 자리를 바꿀 수 있고, 같은 열에 앉은 학생들끼리도 자리를 바꿀 수 있으므로 가능한 방법의 수는

$2!\cdot2!\cdot2!\cdot2! = 16$

(ⅱ) 1부 공연 때 B열에 앉은 학생 중에서 한 명이 2부 공연에서도 B열에 앉는 경우

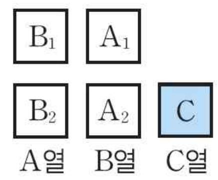


B_1에 앉았던 학생이 B열에 앉으면 나머지 학생들은 오른쪽 그림과 같이 앉을 수 있다.

따라서 가능한 방법의 수는 (ⅰ)과 같이

$2!\cdot2!\cdot2!\cdot2! = 16$

(ⅲ) 1부 공연 때 C열에 앉은 학생 한 명이 2부 공연에서도 C열에 앉는 경우



C에 앉았던 학생이 C열에 앉으면 나머지 학생들은 오른쪽 그림과 같이 앉을 수 있다.

이때 A_1과 A_2, B_1과 B_2는 자리를 바꿀 수 있으므로 가능한 방법의 수는

$2!\cdot2! = 4$

이상에서 구하는 방법의 수는

$16+16+4 = 36$

6) **정답** 36 번째

[전략] 각 자리의 숫자의 합이 4가 되는 네 자리 자연수의 각 자리의 숫자의 순서쌍을 찾는다.

[풀이]

각 자리의 숫자의 합이 4인 네 자리 이하의 자연수는 다음의 숫자들을 나열하여 만들 수 있다.

4, 0, 0, 0 또는 3, 1, 0, 0 또는 2, 2, 0, 0 또는 2, 1, 1, 0 또는 1, 1, 1, 1

(ⅰ) 4, 0, 0, 0으로 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수의 개수는

$\dfrac{4!}{3!} = 4$

(ⅱ) 3, 1, 0, 0으로 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수의 개수는

$\dfrac{4!}{2!} = 12$

(ⅲ) 2, 2, 0, 0으로 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수의 개수는

$\dfrac{4!}{2!\cdot2!} = 6$

(ⅳ) 2, 1, 1, 0으로 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수의 개수는

$\dfrac{4!}{2!} = 12$

(ⅴ) 1, 1, 1, 1로 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수의 개수는

1

이상에서 각 자리의 숫자의 합이 4인 네 자리 이하의 자연수의 개수는

$4+12+6+12+1 = 35$

따라서 구하는 자연수는 36번째 수이다.

7) **정답** 6

[전략] 재석이와 명수가 푼 문제 중에서 3번 문제만 답이 3으로 일치함을 이용한다.

[풀이]

재석이와 명수 둘 다 3문제씩 맞히기 위해서는 3번의 정답은 반드시 3이어야 한다.

따라서 재석이는 3번 문제를 제외한 나머지 4개의 문제 중에서 2문제를 맞히고, 명수는 3번 문제와 재석이가 맞힌 2문제를 제외한 나머지 2문제 중에서 2문제를 맞혀야 하므로 구하는 경우의 수는

${}_4C_2\cdot{}_2C_2 = 6\cdot1 = 6$

8) **정답** ⑤

5일차 과제

[전략] 집합 U의 원소 7개 중에서 4개를 뽑으면 가장 큰 수는 집합 A의 원소이다.

[풀이]

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7의 7개의 수 중에서 4개를 뽑으면 그 중에 가장 큰 수는 집합 A의 원소가 된다.

나머지 3개의 수 중에서 집합 A의 다른 한 원소를 택하면 집합 B의 두 원소가 정해지므로 구하는 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는

$${}_{7}\mathrm{C}_{4}\cdot{}_{3}\mathrm{C}_{1}=35\cdot 3=105$$

9) **정답** 7

$10\times\dfrac{4}{5}=8$(명)이므로 8명 이상 참석해야 동아리 활동을 진행할 수 있다. • 20 %

(ⅰ) 8명이 참석할 확률은 ${}_{10}\mathrm{C}_{8}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{8}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2}=\dfrac{45}{2^{10}}$ • 20 %

(ⅱ) 9명이 참석할 확률은 ${}_{10}\mathrm{C}_{9}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{9}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1}=\dfrac{10}{2^{10}}$ • 20 %

(ⅲ) 10명이 참석할 확률은 ${}_{10}\mathrm{C}_{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{0}=\dfrac{1}{2^{10}}$ • 20 %

이상에서 동아리 활동이 진행될 확률은

$$\frac{45}{2^{10}}+\frac{10}{2^{10}}+\frac{1}{2^{10}}=\frac{56}{2^{10}}=\frac{7}{2^{7}}$$

$\therefore\ n=7$ • 20 %

10) **정답** 0

[전략] 독립시행의 확률을 이용하여 $\mathrm{P}(k)$를 구한 다음 이항정리를 이용한다.

[풀이]

주사위를 한 번 던질 때, 6의 약수가 나올 확률이 $\dfrac{2}{3}$이므로

$$\mathrm{P}(k)={}_{60}\mathrm{C}_{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{60-k}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 60)$$

$$\begin{aligned}
&\therefore\ \sum_{k=1}^{30}\{\mathrm{P}(2k-1)-\mathrm{P}(2k)\}\\
&=\{\mathrm{P}(1)-\mathrm{P}(2)\}+\{\mathrm{P}(3)-\mathrm{P}(4)\}+\cdots+\{\mathrm{P}(59)-\mathrm{P}(60)\}\\
&=\left\{{}_{60}\mathrm{C}_{1}\left(\frac{2}{3}\right)^{1}\left(\frac{1}{3}\right)^{59}-{}_{60}\mathrm{C}_{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{58}\right\}\\
&\qquad+\left\{{}_{60}\mathrm{C}_{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{57}-{}_{60}\mathrm{C}_{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{56}\right\}\\
&\qquad+\cdots+\left\{{}_{60}\mathrm{C}_{59}\left(\frac{2}{3}\right)^{59}\left(\frac{1}{3}\right)^{1}-{}_{60}\mathrm{C}_{60}\left(\frac{2}{3}\right)^{60}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\right\}\\
&={}_{60}\mathrm{C}_{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{0}\left(\frac{1}{3}\right)^{60}-\left\{{}_{60}\mathrm{C}_{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{0}\left(\frac{1}{3}\right)^{60}-{}_{60}\mathrm{C}_{1}\left(\frac{2}{3}\right)^{1}\left(\frac{1}{3}\right)^{59}\right.\\
&\qquad\left.+{}_{60}\mathrm{C}_{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{58}-\cdots+{}_{60}\mathrm{C}_{60}\left(\frac{2}{3}\right)^{60}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\right\}\\
&=\left(\frac{1}{3}\right)^{60}-\sum_{k=0}^{60}{}_{60}\mathrm{C}_{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\left(-\frac{1}{3}\right)^{60-k}\\
&=\left(\frac{1}{30}\right)^{60}-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)^{60}\\
&=\left(\frac{1}{3}\right)^{60}-\left(\frac{1}{3}\right)^{60}=0
\end{aligned}$$

[SSEN 보충학습] 이항정리

자연수 n에 대하여 $\quad(a+b)^{n}=\displaystyle\sum_{r=0}^{n}{}_{n}\mathrm{C}_{r}a^{n-r}b^{r}$

11) **정답** ①

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-2}{2a_n+1}=b_n$으로 놓으면

$3a_n-2=2a_nb_n+b_n,\ (3-2b_n)a_n=b_n+2$

$\therefore a_n=\dfrac{b_n+2}{3-2b_n}$

이때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=3$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n+2}{3-2b_n}=\frac{3+2}{3-2\cdot3}=-\frac{5}{3}$$

12) **정답** ③

$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+3$에서 $a_{n+1}-6=\dfrac{1}{2}(a_n-6)$

따라서 수열 $\{a_n-6\}$은 첫째항이 $a_1-6=1$, 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$a_n-6=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\qquad\therefore a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+6$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+6\right\}=6$$

13) **정답** ④

선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$을 $2:3$으로 내분하는 점 A_{n+2}의 좌표는

$$\frac{2x_{n+1}+3x_n}{5}$$

즉 $x_{n+2}=\dfrac{2x_{n+1}+3x_n}{5}$이므로

$$5x_{n+2}=2x_{n+1}+3x_n,\ 5(x_{n+2}-x_{n+1})=-3(x_{n+1}-x_n)$$

$$\therefore x_{n+2}-x_{n+1}=-\frac{3}{5}(x_{n+1}-x_n)$$

$x_{n+1}-x_n=y_n$으로 놓으면

$$y_{n+1}=-\frac{3}{5}y_n,\ y_1=x_2-x_1=5$$

따라서 수열 $\{y_n\}$은 첫째항이 5, 공비가 $-\dfrac{3}{5}$인 등비수열이므로

$$y_n=5\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1},\ \text{즉 } x_{n+1}=x_n+5\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}$$

위의 식의 양변에 n 대신 $1,2,3,\cdots,n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
x_2&=x_1+5\\
x_3&=x_2+5\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\\
x_4&=x_3+5\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{2}\\
&\ \ \vdots\\
+\ )\ x_n&=x_{n-1}+5\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-2}\\
\hline
x_n&=x_1+5+5\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)+\cdots+5\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-2}\\
&=x_1+\sum_{k=1}^{n-1}5\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{k-1}=2+\frac{5\left\{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}}{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}\\
&=2+\frac{25}{8}-\frac{25}{8}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}=\frac{41}{8}-\frac{25}{8}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{41}{8}-\frac{25}{8}\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}=\frac{41}{8}$$

14) **정답** ②

주어진 조건에서

$$a_1=12,\qquad a_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n+4)=\frac{1}{4}a_n+1$$

$$\therefore a_{n+1}-\frac{4}{3}=\frac{1}{4}\left(a_n-\frac{4}{3}\right)$$

따라서 수열 $\left\{a_n-\dfrac{4}{3}\right\}$는 첫째항이 $a_1-\dfrac{4}{3}=\dfrac{32}{3}$, 공비가 $\dfrac{1}{4}$인 등비수열이므로

$$a_n-\frac{4}{3}=\frac{32}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n=\frac{32}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\frac{4}{3}$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{32}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\frac{4}{3}\right\}=\frac{4}{3}$$

15) **정답** ①

$x\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\displaystyle\lim_{x\to0}(|3x-a|-b)=0$이므로 $|-a|-b=0$

$\therefore\ b=a\,(\because a>0)$ …… ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{|3x-a|-a}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{(|3x-a|-a)(|3x-a|+a)}{2x(|3x-a|+a)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{9x^2-6ax}{2x(|3x-a|+a)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{9x-6a}{2(|3x-a|+a)}$$
$$=\frac{-6a}{4a}=-\frac{3}{2}$$

16) **정답** ①

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{f(a+h)}-\frac{1}{f(a)}\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\{\frac{f(a)-f(a+h)}{f(a+h)f(a)}\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{-\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\frac{1}{f(a+h)f(a)}\right\}=-\frac{f'(a)}{\{f(a)\}^2}$$

17) **정답** ④

$f(x)=-x^4+6x^2-8x+3$에서

$f'(x)=-4x^3+12x-8=-4(x-1)^2(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2\,(\because -3\le x\le 0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값 27 $x=-3$일 때 최솟값 0을 가지므로

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	27	$\searrow$	3

$M=27,\ m=0 \qquad \because M-m=27$

18) **정답** ②

점 P의 좌표를 $(a,\ -a^2+3a)$ $(0<a<3)$로 놓으면 $\mathrm{H}(a,\ 0)$이므로 $\triangle\mathrm{OPH}$의 넓이를 $S(a)$라 하면

$$S(a)=\frac{1}{2}a(-a^2+3a)=\frac{1}{2}(-a^3+3a^2)$$
$$\therefore S'(a)=\frac{1}{2}(-3a^2+6a)=-\frac{3}{2}a(a-2)$$

$S'(a)=0$에서 $a=2$ $(\because 0<a<3)$

a	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 $a=2$일 때 $S(a)$는 극대이면서 최대이므로 $\triangle\mathrm{OPH}$의 최댓값은

$$S(2)=\frac{1}{2}(-8+12)=2$$

19) **정답** $\left(-\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$

$f(x)=x^3-3x+1$

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$또는 $x=1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 극댓값 3, $x=1$일 때, 극솟값 -1을 가지므로 $\mathrm{A}(-1,\ 3)$, $\mathrm{B}(1,\ -1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1\cdot1+2\cdot(-1)}{1+2},\ \frac{1\cdot(-1)+2\cdot3}{1+2}\right),\text{즉 }\left(-\frac{1}{3},\ \frac{5}{3}\right)$$

20) **정답** ④

<전략>

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 실수)이고, $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면

$\lim_{x\to a}f(x)=0$이다.

<풀이>

$f(x)$는 삼차함수이므로 모든 실수 x에 대하여 미분가능하고 연속이다.

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+3}{x-1}=0$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}\{f(x)+3\}=0$이므로 $f(1)=-3$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로

$f'(1)=0$

또 $\lim_{x\to5}\frac{f(x)-4}{x-5}=0$에서 $x\to5$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

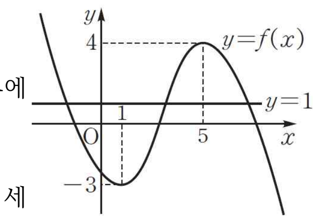
즉 $\lim_{x\to5}\{f(x)-4\}=0$이므로 $f(5)=4$

$\lim_{x\to5}\frac{f(x)-4}{x-5}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=f'(5)$이므로

$f'(5)=0$

$f'(1)=0$, $f'(5)=0$이고 $f(x)$는 삼차함수 이므로 $f(x)$는 $x=1$, $x=5$에서 극값을 갖는다. 이때 $f(1)<f(5)$이므로 극솟값은 $f(1)$, 극댓값은 $f(5)$이다.

따라서 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 오른쪽 그림에서 함수 $f(x)$는 $x=3$의 좌우에서 증가한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=5$에서 극댓값 4를 갖는다.

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=1$은 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=1$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ