수학 영역(나형) by 고지우

1. $4 \times 16^{\frac{1}{4}}$의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

2. 두 집합 $A = \{3, 6, 9, 12, 15\}$, $B = \{6, 12, 18\}$에 대하여 집합 $A - B$의 원소의 개수는? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. $\lim_{n \to \infty} \frac{9n-1}{2n+5}$의 값은? [2점]

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

4. 두 양수 a, b에 대하여 $\log_2 a = 54$, $\log_2 b = 9$일 때, $\log_b a$의 값은? [3점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

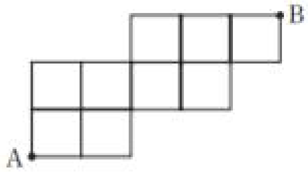
5. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2=5$, $a_{10}=80$일 때, $\frac{a_5}{a_1}$의 값은? [3점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$
④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

6. $\lim_{x\to3}\left\{\frac{1}{x-3}\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{x^2+1}\right)\right\}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$
④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

7. 그림과 같이 정사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 갑은 A지점에서 B지점을 향하여, 을은 B지점에서 A 지점을 향하여 최단거리로 이동한다. 두 사람이 동시에 출발하여 같은 속력으로 이동할 때, 도로망의 중간에서 만나기 위하여 이동하는 경우의 수는? (단, 두 사람이 만나면 더 이상 이동하지 않는다.) [3점]



① 31 ② 33 ③ 35
④ 37 ⑤ 39

수학강사 고지우 드림

8. 실수 x에 대하여 두 조건 p, q가

$p : a \le x \le a+2$
$q : x < 5$ 또는 $x > 9$

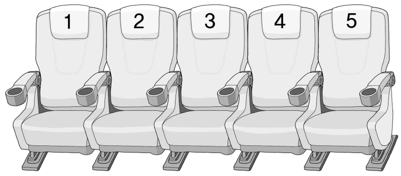
이다. $\sim p$는 q이기 위한 필요조건이 되도록 하는 모든 정수 a의 값의 합은? [3점]

① 14 ② 16 ③ 18
④ 20 ⑤ 22

9. 16의 네제곱근 중 실수인 것을 a, -27의 세제곱근 중 실수인 것을 b라 할 때, $a-b$의 최댓값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

10. 할머니, 아버지, 어머니, 아들, 딸로 구성된 5명의 가족이 있다. 이 가족이 그림과 같이 번호가 적힌 5개의 의자에 모두 앉을 때, 아버지, 어머니가 모두 홀수 번호가 적힌 의자에 앉는 경우의 수는? [3점]



① 28 ② 30 ③ 32
④ 34 ⑤ 36

수학강사 고지우 드림

11. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$\sqrt{x^2+3x+3} \le f(x) \le \sqrt{x^2+3x+6}$$

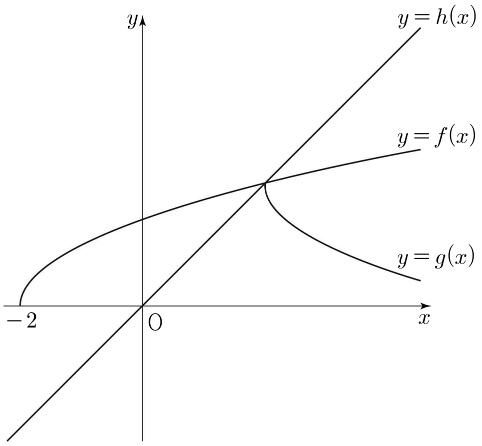
을 만족시킬 때, $\lim_{x \to \infty}\{x-f(x)\}$의 값은? [3점]

① -3　② $-\frac{5}{2}$　③ -2　④ $-\frac{3}{2}$　⑤ -1

12. 전체집합 $U=\{x \mid x$는 7이하의 자연수$\}$의 세 부분집합 $A,\ B,\ C$에 대하여 $B \subset A$이고 $A \cup C=\{1,2,3,4,5,6\}$이다. $A-B=\{5\},\ B-C=\{2\},\ C-A=\{4,6\}$일 때, 집합 $A \cap (B^C \cup C)$는? [3점]

① $\{5\}$　② $\{1,7\}$　③ $\{3,5\}$　④ $\{1,3,5\}$　⑤ $\{1,2,3,5,7\}$

[13 ~ 14] 세 함수 $f(x)=\sqrt{x+2}$, $g(x)=-\sqrt{x-2}+2$, $h(x)=x$ 의 그래프가 그림과 같다. 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



13. 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다. 두 상수 m, n의 합 $m+n$ 의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

14. 함수 $y=h(x)$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(a, a)$를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점을 A, 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 B라 하자. 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선이 함수 $y=h(x)$의 그래프와 만나는 점을 C라 할 때, $\lim\limits_{a\to 2-}\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$ 의 값은? (단, $0<a<2$) [4점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

15. 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{ax^{2n+1}+bx-3}{x^{2n}+1}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to1}f(x)$의 값이 존재한다.
(나) $\lim_{x\to-1-}f(x)\times\lim_{x\to-1+}f(x)=16$

두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? (단, $a>0$이고, n은 자연수이다.) [4점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

16. 어떤 지역의 먼지농도에 따른 대기오염 정도는 여과지에 공기를 여과시켜 헤이즈계수를 계산하여 판별한다. 광화학적 밀도가 일정하도록 여과지 상의 빛을 분산시키는 고형물의 양을 헤이즈계수 H, 여과지 이동거리를 $L(\mathrm{m})\,(L>0)$, 여과지를 통과하는 빛전달률을 $S\,(0<S<1)$라 할 때, 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$H=\frac{k}{L}\log\frac{1}{S}$$ (단, k는 양의 상수이다.)

두 지역 A, B의 대기오염 정도를 판별할 때, 각각의 헤이즈계수를 H_A, H_B, 여과지 이동거리를 L_A, L_B, 빛전달률을 S_A, S_B라 하자. $\sqrt{3}\,H_A=2H_B$, $L_A=2L_B$일 때, $S_A=(S_B)^p$을 만족시키는 실수 p의 값은? [4점]

① $\sqrt{3}$ ② $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ ③ $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$

17. 집합 $X=\{0, 1, 2, 3, 4\}$의 모든 원소 x에 대하여 X에서 X로의 함수 $f(x)$는 '$2x$를 5로 나눈 나머지'로 정의하고, X에서 X로의 함수 $g(x)$는 $(f \circ g)(x)=(g \circ f)(x)$를 만족시킨다.
$g(1)=3$일 때, $g(0)+g(3)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

18. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{4}{3}+\frac{8}{3^2}+\frac{12}{3^3}+\cdots+\frac{4n}{3^n}=3-\frac{2n+3}{3^n} \quad \cdots\cdots(*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>
(1) $n=1$일 때, (좌변)$=\frac{4}{3}$, (우변)$=3-\frac{5}{3}=\frac{4}{3}$이므로
(*)이 성립한다.
(2) $n=k$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\frac{4}{3}+\frac{8}{3^2}+\frac{12}{3^3}+\cdots+\frac{4k}{3^k}=3-\frac{2k+3}{3^k}$$

이다.
위 등식의 양변에 $\frac{4(k+1)}{3^{k+1}}$을 더하여 정리하면

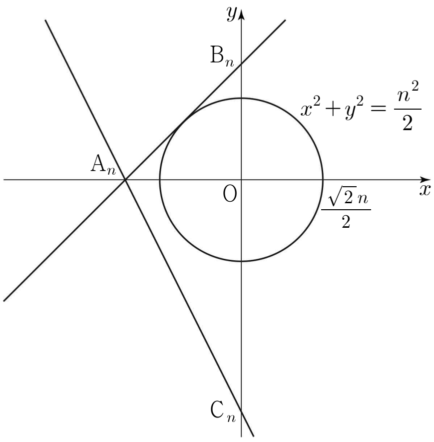
$$\frac{4}{3}+\frac{8}{3^2}+\frac{12}{3^3}+\cdots+\frac{4k}{3^k}+\frac{4(k+1)}{3^{k+1}}$$
$$=3-\frac{1}{3^k}\left\{(2k+3)-\left(\boxed{\text{(가)}}\right)\right\}$$
$$=3-\frac{\boxed{\text{(나)}}}{3^{k+1}}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 (*)이 성립한다.
(1), (2)에 의하여
모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $f(3)\times g(2)$의 값은? [4점]

① 36 ② 39 ③ 42
④ 45 ⑤ 48

19. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 기울기가 1이고 y절편이 양수인 직선이 원 $x^2+y^2=\frac{n^2}{2}$에 접할 때, 이 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A_n, B_n이라 하자. 점 A_n을 지나고 기울기가 -2인 직선이 y축과 만나는 점을 C_n이라 할 때, 삼각형 $A_nC_nB_n$과 그 내부의 점들 중 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [4점]



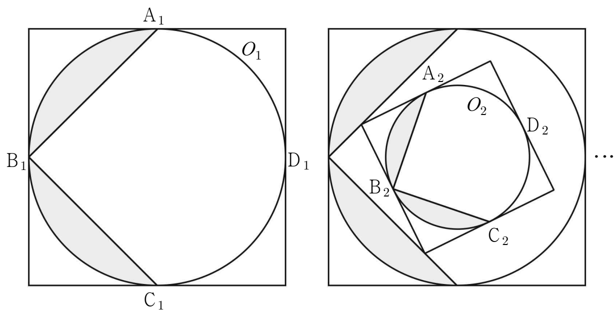
① 715 ② 725 ③ 735
④ 745 ⑤ 755

20. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형에 내접하는 원 O_1이 있다. 정사각형과 원 O_1의 접점을 각각 A_1, B_1, C_1, D_1이라 할 때, 원 O_1과 두 선분 A_1B_1, B_1C_1로 둘러싸인 ☾ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 두 선분 A_1B_1, B_1C_1을 각각 $3:1$로 내분하는 두 점을 이은 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 원 O_1의 내부에 그린다. 이 정사각형에 내접하는 원을 O_2라 하고 그 접점을 각각 A_2, B_2, C_2, D_2라 할 때, 원 O_2와 두 선분 A_2B_2, B_2C_2로 둘러싸인 ☾ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에서 두 선분 A_2B_2, B_2C_2를 각각 $3:1$로 내분하는 두 점을 이은 선분을 한 변으로 하는 정사각형에 그림 R_1에서 그림 R_2를 얻는 것과 같은 방법으로 만들어진 ☾ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

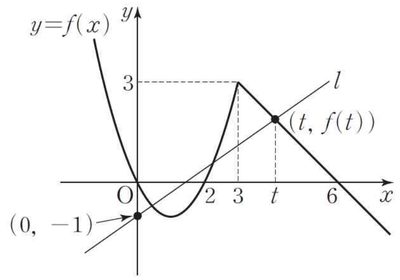
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1 R_2

① $\frac{32}{11}(\pi-2)$ ② $\frac{34}{11}(\pi-2)$ ③ $\frac{36}{11}(\pi-2)$
④ $\frac{32}{11}(\pi-1)$ ⑤ $\frac{34}{11}(\pi-1)$

21. 그림과 같이 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & (x \le 3) \\ -x+6 & (x>3) \end{cases}$과 임의의 실수 t에 대하여 두 점 $(0,\ -1)$, $(t,\ f(t))$를 지나는 직선 l이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 예를 들어, 두 점 $(0,\ -1)$, $(0,\ f(0))$을 지나는 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점의 개수가 1이므로 $g(0)=1$이다. $\lim_{t\to a-} g(t) \neq \lim_{t\to a+} g(t)$를 만족시키는 서로 다른 실수 a의 값은 $a_1, a_2, \cdots, a_n$의 n개이다. $n(a_1+a_2+\cdots+a_n)$의 값은? [4점]



① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

단답형

22. ${}_n\mathrm{P}_2=56$일 때, 자연수 n의 값을 구하시오. [3점]

23. $\sum_{k=1}^{6}(k^2+5)$의 값을 구하시오. [3점]

24. 1보다 큰 모든 실수의 집합에서 정의된 두 함수

$$f(x)=\frac{4}{x-1}+4,\ \ g(x)=\sqrt{x+4}$$

에 대하여 $(g\circ f)(5)$의 값을 구하시오. [3점]

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2^n+1)(3^n+1)}{12^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2^n-1)(3^n-1)}{12^n}=p$ 라 할 때, $15p$의 값을 구하시오. [3점]

26. 다음 조건을 만족시키는 자연수 $x,\ y,\ z,\ w$의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ w)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $x+y+z+w=18$
(나) $x,\ y,\ z,\ w$ 중에서 2개는 3으로 나눈 나머지가 1이고, 2개는 3으로 나눈 나머지가 2이다.

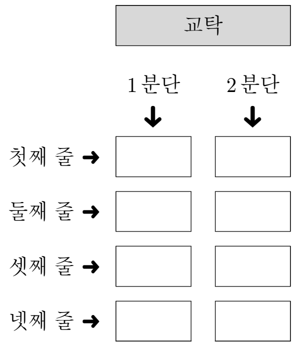
27. 좌표평면 위에

함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{x} & (x>0) \\ \dfrac{12}{x} & (x<0) \end{cases}$ 의 그래프와 직선 $y=-x$가 있다.

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 P를 지나고 x축에 수직인 직선이 직선 $y=-x$와 만나는 점을 Q, 점 Q를 지나고 y축에 수직인 직선이 $y=f(x)$와 만나는 점을 R라 할 때, 선분 PQ와 선분 QR의 길이의 곱 $\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{QR}}$ 의 최솟값을 구하시오. [4점]

28. 교내 수학경시대회에 A 학급 학생 3명, B 학급 학생 3명, C 학급 학생 2명이 참가 신청하였다. 그림과 같이 두 분단, 네 줄의 좌석에 다음 조건을 만족시키도록 이 학생 8명을 배정하는 방법의 수를 구하시오. [4점]

> (가) 같은 줄의 바로 옆에 같은 학급 학생이 앉지 않도록 배정한다.
> (나) 같은 분단의 바로 앞뒤에 같은 학급 학생이 앉지 않도록 배정한다.
> (다) 같은 학급 학생을 같은 분단에 배정 할 경우 학급 번호가 작을수록 교탁에 가까운 자리에 배정한다.



29. 전체집합 $U=\{x|x$는 10이하의 자연수$\}$의 부분집합 X에 대하여 $X \neq \varnothing$일 때 $f(X)$를 X에 속하는 모든 원소의 합이라 하고, $X=\varnothing$일 때 $f(\varnothing)=0$이라 하자. U의 두 부분집합 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 U의 부분집합 C의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(C-A) > f(A-C)$
(나) $f(B-C) > f(C-B)$
(다) $A \cap C \neq \varnothing$

30. 함수 $f(x)=x^2-8x+a$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} 2x+5a & (x \geq a) \\ f(x+4) & (x < a) \end{cases}$$

라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 곱을 구하시오. [4점]

(가) 방정식 $f(x)=0$은 열린 구간 $(0, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
(나) 함수 $f(x)g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

※ 확인 사항

문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.