

수학 영역(가형) by 고지우

제 2 교시

1

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{4x}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

2. ${}_n P_2 = 56$ 일 때, 자연수 n 의 값은? [2점]

- ① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

3. $f(x) = \sin x$ 일 때, $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 의 값은? [2점]

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

4. 좌표평면에서 두 곡선 $y = \log_2 x$, $y = \log_4 x$ 가 직선 $x = 16$ 과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 두 점 P, Q 사이의 거리는? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

5. 남학생 4명과 여학생 3명이 원형의 탁자에 앉을 때, 2명의 여학생은 서로 이웃하고 남은 1명의 여학생은 다른 여학생과 서로 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

- ① 412 ② 422 ③ 432
 ④ 442 ⑤ 452

6. 곡선 $x^2 + y^2 + axy + b = 0$ 위의 점 $(2, 3)$ 에서 접선의 기울기가 -4 일 때, 두 상수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값은? [3점]

- ① 5 ② 6 ③ 7
 ④ 8 ⑤ 9

7. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{2x-1} dx$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{2}{15}$ ③ $\frac{1}{5}$
 ④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

8. $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 방정식 $\log_2 \cos x - \log_2 \sec x = -1$ 의 두 실근을 α, β ($\alpha < \beta$)라 할 때, $\beta - \alpha$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ $\frac{2\pi}{3}$
 ④ $\frac{3\pi}{4}$ ⑤ $\frac{5\pi}{6}$

9. 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$ 가

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{x-1} = \frac{1}{3}$ 을 만족시킨다. $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g(2) + g'(2)$ 의 값은? [3점]

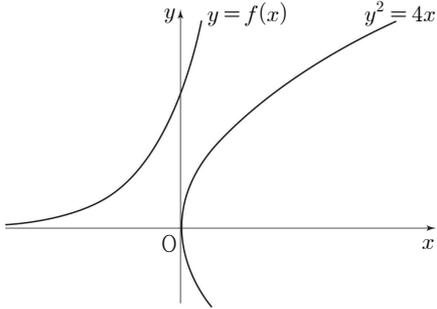
- ① $\frac{4}{3}$ ② 2 ③ $\frac{8}{3}$
 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ 4

10. 좌표평면 위에서 다음 조건을 만족시키는 서로 다른 두 점 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 를 정하는 경우의 수는? [3점]

(가) x_1, y_1, x_2, y_2 는 모두 자연수이다.
 (나) $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = 12$ 이다.

- ① 156 ② 158 ③ 160
 ④ 162 ⑤ 164

[11 ~ 12] 그림과 같이 실수 k 에 대하여 함수 $f(x) = e^{x+k}$ 의 그래프와 포물선 $y^2 = 4x$ 가 있다. 11번과 12번의 두 물음에 답하시오.



11. $k=1$ 일 때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 포물선 $y^2=4x$ 의 준선, x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

- ① $e-2$ ② $e-1$ ③ $e-\frac{1}{2}$
 ④ $e-\frac{1}{e}$ ⑤ $e-\frac{1}{2e}$

12. 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(4, 4)$ 에서의 접선이 y 축과 만나는 점을 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 지날 때, k 의 값은? [3점]

- ① $\ln 2$ ② $\ln \frac{7}{3}$ ③ $\ln \frac{8}{3}$
 ④ $\ln 3$ ⑤ $\ln \frac{10}{3}$

13. 타원 $kx^2 + \frac{y^2}{2} = 1 (k > \frac{1}{2})$ 의 한 초점을 지나고 이 타원 위의 점 (a, b) 에서의 접선과 평행한 직선의 방정식은 $y = -2x + \frac{\sqrt{6}}{2}$ 이다. $a+b$ 의 값은? (단, $a > 0, b > 0$) [3점]

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

14. 함수 $f(x) = \frac{3^x}{3^x+3}$ 에 대하여 점 (p, q) 가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이면 실수 p 의 값에 관계없이 점 $(2a-p, a-q)$ 도 항상 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이다. 다음은 상수 a 의 값을 구하는 과정이다.

점 $(2a-p, a-q)$ 가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$\frac{3^{2a-p}}{3^{2a-p}+3} = a - \boxed{\text{(가)}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이다. ①은 실수 p 의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$p=0 \text{ 일 때, } \frac{3^{2a}}{3^{2a}+3} = a - \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이고,

$$p=1 \text{ 일 때, } \frac{3^{2a}}{3^{2a} + \boxed{\text{(나)}}} = a - \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

이다. ②, ③에서

$$(3^{2a}+3)(3^{2a} + \boxed{\text{(나)}}) = 24 \times 3^{2a}$$

이므로

$$a = \frac{1}{2} \text{ 또는 } a = \boxed{\text{(다)}}$$

이다. 이때, ③에서 좌변이 양수이므로 $a > \frac{1}{2}$ 이다.

따라서 $a = \boxed{\text{(다)}}$ 이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $g(p)$ 라 하고 (나)와 (다)에 알맞은 수를 각각 m, n 이라 할 때, $(m-n) \times g(2)$ 의 값은? [4점]

- ① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

15. 지상 1층부터 10층까지 운행하는 엘리베이터가 있다. 1층에서 엘리베이터를 탑승한 4명이 10층까지 1회 운행하는 동안 모두 내릴 때, 서로 연속한 층에서 내리지 않고 각 층에서 1명씩만 내리는 경우의 수는? (단, 1층에서 내리는 사람은 없다.) [4점]

- ① 350 ② 360 ③ 370
 ④ 380 ⑤ 390

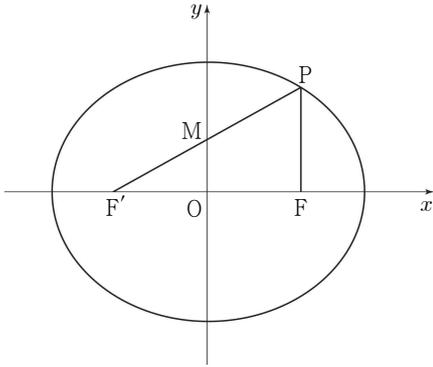
16. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x) = x(\ln x - 3)$, $g(x) = e^{2\cos x + 3}$ 에 대하여 합성함수 $(f \circ g)(x)$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $\frac{M}{m}$ 의 값은?

[4점]

- ① -1 ② -e ③ -e²
 ④ -2e² ⑤ -2e³

17. 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 두 초점 중

x 좌표가 양수인 점을 F , 음수인 점을 F' 이라 하자. 타원 위의 점 P 에 대하여 선분 PF' 의 중점 M 의 좌표가 $(0, 1)$ 이고 $\overline{PM} = \overline{PF}$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [4점]



- ① 14
- ② 15
- ③ 16
- ④ 17
- ⑤ 18

18. 양의 실수 t 에 대하여 곡선 $y = \ln x$ 위의 두 점 $P(t, \ln t)$, $Q(2t, \ln 2t)$ 에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 각각 $R(r(t), 0)$, $S(s(t), 0)$ 이라 하자. 함수 $f(t)$ 를 $f(t) = r(t) - s(t)$ 라 할 때, 함수 $f(t)$ 의 극솟값은? [4점]

- ① $-\frac{1}{2}$
- ② $-\frac{1}{3}$
- ③ $-\frac{1}{4}$
- ④ $-\frac{1}{5}$
- ⑤ $-\frac{1}{6}$

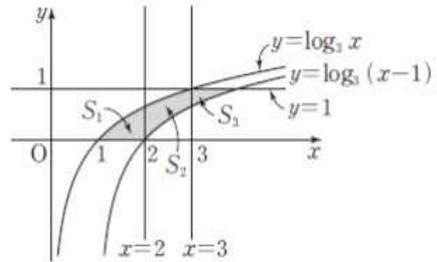
19. 점 $P(t, 0)$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$)를 지나고 x 축에 수직인 직선이 곡선 $y = 2\sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$)와 만나는 점을 Q, P를 지나고 x 축에 수직인 평면 위에 $\angle RPQ = t$, $\angle PQR = \frac{\pi}{2}$ 를 만족시키는 점을 R라 하자. 입체도형을 점 P를 지나고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 선분 PR를 지름으로 하고 직각삼각형 PQR를 포함하는 반원일 때, 이 입체도형의 부피는? [4점]

- ① $\frac{(\pi - \ln 6)\pi}{8}$
- ② $\frac{(\pi - \ln 5)\pi}{8}$
- ③ $\frac{(\pi - 2\ln 2)\pi}{8}$
- ④ $\frac{(\pi - \ln 3)\pi}{8}$
- ⑤ $\frac{(\pi - \ln 2)\pi}{8}$

20. 그림과 같이 함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x = 2$ 로 둘러싸인 색칠된 부분의 넓이를 S_1 , 두 함수 $y = \log_3 x, y = \log_3(x-1)$ 의 그래프와 두 직선 $x = 2, x = 3$ 으로 둘러싸인 색칠된 부분의 넓이를 S_2 , 함수 $y = \log_3(x-1)$ 의 그래프와 두 직선 $x = 3, y = 1$ 로 둘러싸인 색칠된 부분의 넓이를 S_3 이라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

- ㄱ. $S_1 < \frac{1}{2} \log_3 2$
- ㄴ. $S_1 + S_2 > \frac{1 + \log_3 2}{2}$
- ㄷ. $S_1 + S_2 + S_3 < 1$



- ① ㄱ
- ② ㄴ
- ③ ㄷ
- ④ ㄱ, ㄴ
- ⑤ ㄴ, ㄷ

21. 닫힌 구간 $[-2, 2]$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & (-2 \leq x \leq 0) \\ -x+2 & (0 < x \leq 2) \end{cases}$$

이다. 좌표평면에서 $k > 1$ 인 실수 k 에 대하여 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 타원 $\frac{x^2}{k^2} + y^2 = 1$ 이 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(k)$ 라 하자. 함수 $g(k)$ 가 불연속이 되는 모든 k 의 값들의 제곱의 합은? [4점]

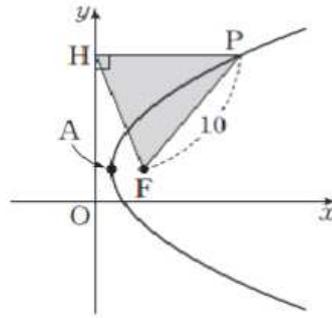
- ① 6 ② $\frac{25}{4}$ ③ $\frac{13}{2}$
 ④ $\frac{27}{4}$ ⑤ 7

단답형

22. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow X$ 의 개수를 구하시오. [3점]

- (가) 함수 f 는 일대일 대응이다.
 (나) $f(x) = x$ 를 만족시키는 x 의 개수는 2, $f(x) \neq x$ 를 만족시키는 x 의 개수는 3이다

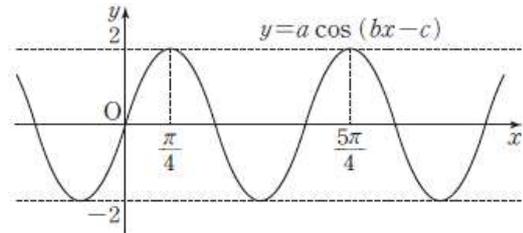
23. 그림과 같이 점 $F(3, 2)$ 를 초점으로 하고 점 $A(1, 2)$ 를 꼭짓점으로 하는 포물선 위의 점 P 에서 y 축에 내린 수선의 발을 H 라 하자. $\overline{PF} = 10$ 일 때, 삼각형 PHF 의 넓이를 구하시오. (단, 점 P 는 제1사분면에 있다.) [3점]



24. 매개변수 $\theta (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ 로 나타낸 곡선 $x = 3 + \cos\theta, y = 1 - \sin\theta$ 에 대하여 $\theta = a$ 에 대응하는 점에서 접선이 기울기가 -2 인 직선과 수직일 때, $\sec^2 a$ 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수이다.) [3점]

26. 그림은 함수 $y = a \cos (bx - c)$ 의 그래프이다.

$a < 0, b > 0, c > 0$ 일 때, $a + b + c$ 의 최솟값을 $\frac{q}{p}\pi$ 라 할 때, $p + q$ 의 값을 구하시오. (단, a, b, c 는 상수이고 p, q 는 서로소인 정수이다.) [4점]



25. $\int_1^5 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} \right) dx = \ln \alpha$ 일 때, 실수 α 의 값을 구하시오.

[3점]

27. 모든 실수 x 에 대하여 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+2)=f(x)$ 이다.
- (나) $0 \leq x \leq 1$ 일 때, $f(x)=\sin\pi x+1$ 이다.
- (다) $1 < x < 2$ 일 때, $f'(x) \geq 0$ 이다.

$\int_0^6 f(x)dx = p + \frac{q}{\pi}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.

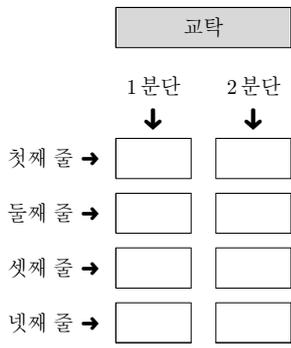
(단, p, q 는 정수이다.) [4점]

28. 다음 조건을 만족시키는 자연수 x, y, z, w 의 모든 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수를 구하시오. [4점]

- (가) $x+y+z+w=18$
- (나) x, y, z, w 중에서 2개는 3으로 나눈 나머지가 1이고, 2개는 3으로 나눈 나머지가 2이다.

29. 교내 수학경시대회에 A 학급 학생 3명, B 학급 학생 3명, C 학급 학생 2명이 참가 신청하였다. 그림과 같이 두 분단, 네 줄의 좌석에 다음 조건을 만족시키도록 이 학생 8명을 배정하는 방법의 수를 구하시오. [4점]

- (가) 같은 줄의 바로 옆에 같은 학급 학생이 앉지 않도록 배정한다.
- (나) 같은 분단의 바로 앞뒤에 같은 학급 학생이 앉지 않도록 배정한다.
- (다) 같은 학급 학생을 같은 분단에 배정 할 경우 학급 번호가 작을수록 교탁에 가까운 자리에 배정한다.



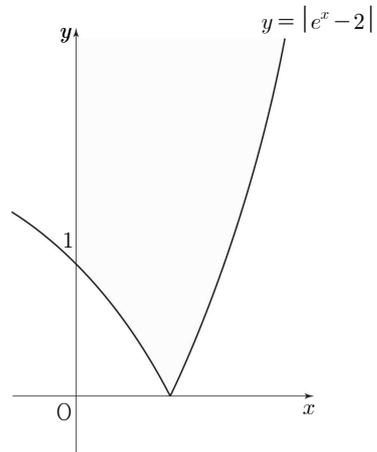
30. 좌표평면에서 x, y 에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq |e^x - 2| \end{cases}$$

가 나타내는 영역을 D 라 하자. 양의 실수 t 에 대하여 영역 D 의 서로 다른 네 점을 꼭짓점으로 하는 정사각형 A 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 정사각형 A 의 한 변의 길이는 t 이다.
- (나) 정사각형 A 의 한 변은 x 축과 평행하다.

정사각형 A 의 두 대각선의 교점의 y 좌표의 최솟값을 $f(t)$ 라 할 때, $f'(\ln 2) + f'(\ln 5) = \frac{q}{p}$ 이다. $p + q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



※ 확인 사항
문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.