수학 가형 21번의 경향과 전략

1. 반복적으로 활용되는 개념과 IDEA

(1) 정적분으로 표시된 함수 - 항등식과 미분
(2) 미분을 통한 그래프 해석
(3) 부분적분 치환적분과 연계

2. 21번 합답형 배치의 의도

(1) 미적 킬러 형식 30번 21번의 유형적 충돌이 있음
(2) 21번을 합답형으로 출제함으로 첫 번째 30번과의 유형적 충돌을 피하여 30번 출제가 자유로움 두 번째, 통합적 발문으로 미분과 적분 연계 좌표평면의 연계가 용이함
** 사실 별 생각 없을 수도 있음.

3. 현 평가원의 난이도 특성상 21번의 중요성은 커지고 있다.

(1) 난이도 구성상 5+5 구조 혹은 25+3+2구조가 유지될 가능성이 높음
(2) 킬러 30번의 난이도는 지속적으로 높아져 감당안될 수준이라고 판단됨.
알고리즘의 복잡도가 높아짐과 동시에 그 복잡함으로 인해 수식정리과 계산과정의 복잡도도 높아질 수밖에 없는 구조로 출제자가 의도했다기보다는 출제과정에서 해결치 못한 부분이 있는 것으로 보인다.
그렇다면 30번 정복은 요원할 수 밖에 없다.
이 난이도가 유지된다는 가정하에 정복할 것은 29번 기하와 21번 이다.
(3) 고득점을 원하는 중상위권이 최상위권과 근접할 수 있는 아주 중요한 요충지로 21번의 의미가 커진다 볼 수 있다.
주의 : 30번을 버리라는 것이 아님 오해하지 말 것.

4. 전략

(1) 출제 경향상 반복되고 있는 개념과 아이디어를 문제에서 확실하게 사용할 수 있어야 한다.
(2) 동일형식의 기출문항의 개념의 연결고리 풀이의 알고리즘을 파악하고 활용이 익숙해지도록 연습한다.
(3) 최근 출제된 기출문항이 중요하며, 이를 기반으로 변형출제된 실모도 중요할 것으로 보인다.

5. 기출분석

1) 구간 $0, 1]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$(x) = \quad {}^{x} f(t)\,dt \;\; (0 \quad x \quad 1)$$

은 다음 조건을 만족시킨다.

> ( ) $F(x) = f(x) - x$
>
> (나) $\displaystyle\int_0^1 F(x)\,dx = e - \frac{5}{2}$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점][2017년 3월]

< 보 기 >

. $F(1) = e$

ㄴ. $\displaystyle\int_0^1 xF(x)\,dx = \frac{1}{6}$

ㄷ. $\displaystyle\int_0^1 \; F(x)\}^2\,dx = \frac{1}{2}e^2 - 2e + \frac{11}{6}$

① ㄴ　　② ㄷ　　③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

REMARK *정형화된 문제이나 문제풀이의 알고리즘, 각 보기간의 연결고리가 확실한 잘만들어진 문제이다. 3평 BEST 중 하나*

(1) $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ 통해 $F(0) = 0$ 이고 $F'(x) = f(x)$ 임을 알수 있다.

(2) 핵심 KEY는 (가)의 $F(x) = f(x) - x$ 를 (나)의 $F(x)$ 에 대입하는 것!!!

$F(1) = e - \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = e - 2$ 임을 찾는다. 첫 보기가 거짓일 때의 심리적 불안은 이 문제의 또다른 복병이다.

(3) 두 번째 보기 역시 $F(x) = f(x) - x$ 을 대입하여 부분 적분법을 쓴다.

부분 적분법을 쓸 수 있는 '당위성'은 바로 $F'(x) = f(x)$ 미분이 있기 때문이다.

(4) ㄷ의 KEY 역시 $F(x) = f(x) - x$ 를 대입하는 것이지만 미분곱 형식이 남은 상태로 치환적분을 쓸수 있어야 하므로

$\int_0^1 \{F(x)\}^2\,dx = \int_0^1 F(x)\{f(x) - x\}\,dx$ 로 변형된다.

(5) 위의 문제는 전년 출제 문항의 알고리즘을 그대로 가지고 있으며 [다른풀이]도 유사하다.

(6) 아래 나열된 전년 기출문항을 확인해 보고 심도있게 분석해 보길 바란다.

2) 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 (x)가 다음 조건을 만족시킨다.

(　) 함수 $f(x)$는 $x=0$ 에서 극댓값, $x=k$에서 극솟값을 가진다. (단, k는 상수이다.) (나) 1보다 큰 모든 실수 t에 대하여 $^{t}\lvert f'(x)\rvert\,dx = f(t)+f(0)$ 이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[4점][2017학년도 수능]

< 보기 >
ㄱ. $\int_0^k f'(x)\,dx < 0$ ㄴ. $0<k \quad 1$ ㄷ. 함수 $f(x)$의 극솟값은 0이다.

①　　② ㄷ　　③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3) 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족한다.

(가) $\frac{f(x)}{x}\Big)' = x^2e^{-x}$ (나) $g(x) = \frac{4}{e^4}\int_1^x e^{t^2}f(t)dt$

$f(1) = \frac{1}{e}$ 일 때, $f(2)-g(2)$의 값은? [4점][2016년 9월]

① $\frac{16}{3e^4}$　② $\frac{6}{e^4}$　③ $\frac{20}{3e^4}$　④ $\frac{22}{3e^4}$　⑤ $\frac{8}{e^4}$

4) 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 (x)가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x) \quad 1$

(나) $f(x)+f(-x)=0$

(다) $f'(x)= \ 1+f(x)\}\{1+f(-x)\}$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2016년 6월]

<보기>

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \quad -1$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$는 어떤 열린 구간에서 감소한다.

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$는 세 개의 변곡점을 갖는다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1) [출제의도] 정적분의 적분법을 이용하여 정적분의 값을 추론한다.

. (가)의 $x)=f(x)-x$를 (나)의 $F(x)$에 대입하면

$$^{1}F(x)\,dx=\int_0^1 \; f(x)-x\}\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^1 x\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{2}$$

$$=F(1)-\frac{1}{2}$$

이므로 $F(1)=e-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=e-2$ (거짓)

ㄴ. (가)의 $F(x)=f(x)-x$를 $\int_0^1 xF(x)dx$의 $F(x)$에 대입하면

$$\int_0^1 xF(x)dx=\int_0^1 x\{f(x)-x\}\,dx=\int_0^1 \; xf(x)-x^2\}\,dx$$

$$=\int_0^1 xf(x)\,dx-\int_0^1 x^2\,dx=\Big[xF(x)\Big]_0^1-\int_0^1 F(x)\,dx-\frac{1}{3}$$

$$=F(1)- \; e-\frac{5}{2}\Big)-\frac{1}{3}=e-2-e+\frac{5}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6} \text{ (참)}$$

ㄷ. $F(0)=\int_0^0 f(t)\,dt=0$이고, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

(가)에 의해서

$$\int_0^1 \{F(x)\}^2\,dx=\int_0^1 F(x)\{f(x)-x\}\,dx=\int_0^1 F(x)f(x)\,dx-\int_0^1 xF(x)\,dx$$

$$=\int_0^1 F(x)F'(x)\,dx-\int_0^1 xF(x)\,dx$$

$$=\Big[\frac{1}{2}\{F(x)\}^2\Big]_0^1-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\{F(1)\}^2-\frac{1}{2}\{F(0)\}^2-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}(e-2)^2-\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{2}e^2-2e+\frac{11}{6} \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

[풀이]

$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $F'(x)=f(x)$

조건 (가)의 $F(x)=f(x)-x$의 양변을 x에 대하여 두 번 미분하면 $f'(x)=f''(x)$

$\frac{f''(x)}{f'(x)}=1$이므로 양변을 x에 대하여 적분하면 $\ln|f'(x)|=x+C_1$ (단, C_1는 적분상수)

$'(x) = \quad e^x($, C_2 는 상수)이므로 양변을 x 에 대하여 적분하면 $f(x) = C_2 e^x + C_3$
(단, C_3 은 적분상수)

$0 = F(0) = f(0) - 0,\ f(0) = 0$

$f(x) = f'(x) - 1$ 이므로 $f'(0) = 1$

$f'(x) = C_2 e^x,\ f(x) = C_2 e^x + C_3$ 에 $x = 0$ 을 대입하면

$f'(0) = C_2 = 1,\ f(0) = C_2 + C_3 = 0,\ C_3 = -1$

$f\ x) = e^x - 1$

이를 조건 (가)에 대입하면

$F(x) = e^x - x - 1$

$$\ {}_0^1 F(x)\,dx = \int_0^1\ e^x - x - 1)\,dx = \left[e^x - \frac{1}{2}x^2 - x\right]_0^1 = (e-1) - \ \frac{1}{2} - 1 = e - \frac{5}{2}$$

이므로 함수 $F(x) = e^x - x - 1$ 은 조건 (나)를 만족시킨다.

ㄱ. $F(1) = e^1 - 1 - 1 = e - 2$ (거짓)

ㄴ. $\displaystyle\int_0^1 xF(x)\,dx = \int_0^1 x\left(e^x - x - 1\right)dx = \int_0^1 xe^x\,dx - \int_0^1 x^2\,dx - \int_0^1 x\,dx$

$$= \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx - \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 - \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$= \left[xe^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1 - \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 - \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$= e - (e-1) - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$ (참)

ㄷ. $\displaystyle\int_0^1 \{F(x)\}^2\,dx = \int_0^1 (e^x - x - 1)^2\,dx = \int_0^1 \left\{e^{2x} + x^2 + 1 - 2xe^x + 2x - 2e^x\right\}dx$

$$= \int_0^1 e^{2x}\,dx + \int_0^1 x^2\,dx + \int_0^1 1\,dx\ \ -2\int_0^1 xe^x\,dx + \int_0^1 2x\,dx - 2\int_0^1 e^x\,dx$$

$$= \left[\ \frac{e^{2x}}{2}\ \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \left[x\right]_0^1 - 2\left[xe^x\right]_0^1 + 2\left[e^x\right]_0^1 + \left[x^2\right]_0^1 - 2\left[e^x\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(e^2 - 1) + \frac{1}{3} + 1 - 2 \times 1 + 1 - 2(e-1) = \frac{1}{2}e^2 - 2e + \frac{11}{6}$$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

2) ⑤

. (가)에서 $f'(x) = ax(x-k) \quad (a > 0)$

라 하면 구간 $[0, k]$에서 $f'(x) \quad$ 0이므로 $\displaystyle\int_0^k f'(x)\,dx < 0$ (참)

ㄴ. 조건 (나)에서 $\displaystyle\int_0^t |f'(x)|\,dx = f(t) + f(0)$

양변을 에 대하여 미분하면 $|f'(t)| = f'(t)$

이때, 은 $t > 1$인 모든 실수 t에 대하여 성립하므로 $f'(t) \quad 0 \quad (t > 1)$

따라서 조건 (가)에서

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값, $x=k$에서 극솟값을 가지므로 $0<k \quad 1$ 이다. (참)

ㄷ. $f'(x)=ax(x-k)=ax\ -akx$ 에서

$$\int_0^t |f'(x)|\,dx = -\int_0^k (ax^2-akx)\,dx + \int_k^1 (ax^2-akx)\,dx$$

$$= -\left[\frac{a}{3}x^3-\frac{ak}{2}x^2\right]_0^k + \left[\frac{a}{3}x^3-\frac{ak}{2}x^2\right]_k^1 = -\ \frac{ak^3}{3}-\frac{ak^3}{2}\Big) + \left(\frac{at^3}{3}-\frac{akt^2}{2}-\frac{ak^3}{3}+\frac{ak^3}{2}\right)$$

$$= \frac{ak^3}{6} + \left(\frac{at^3}{3}-\frac{akt^2}{2}+\frac{ak^3}{6}\right) = \frac{at^3}{3}-\frac{akt^2}{2}+\frac{ak^3}{3} \qquad ㉠$$

또한,

$$f(x) = \int (ax^2-akx)\,dx = \frac{a}{3}x^3-\frac{ak}{2}x^2+ \qquad (C \text{ 는 적분상수})$$

라 하면

$$f(t)+f(0) = \frac{a}{3}t^3-\frac{ak}{2}t^2+C\Big)+C = \frac{a}{3}t^3-\frac{ak}{2}t^2+2C \qquad ㉡$$

㉠, ㉡이 같아야 하므로 $C=\frac{ak^3}{6}$

즉, $f(x) = \frac{a}{3}x^3-\frac{ak}{2}x^2+\frac{ak^3}{6}$이므로 극솟값은 $f(k) = \frac{ak^3}{3}-\frac{ak^3}{2}+\frac{ak^3}{6}=0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

3) ③

$$g\ x) = \frac{4}{e^2}\int_1^x e^t f(t)dt = \frac{2}{e^2}\int_1^x 2te^{t^2}\frac{f(t)}{t}\,dt$$

이 때, $u'=2te^{t^2}$, $v=\frac{f(t)}{t}$라 하면 $u=e^{t^2}$, $v'=t^2e^{-t^2}$ 이다.

그러므로 부분적분법에 의하여

$$g(x) = \frac{2}{e^4}\ \left[e^{t^2}\frac{f(t)}{t}\right]_1^x - \int_1^x t^2dt\Big\} = \frac{2}{e^4}\left\{e^{x^2}\frac{f(x)}{x}-ef(1)-\left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^x\right\}$$

$$= \frac{2}{e^4}\left\{e^{x^2}\frac{f(x)}{x}-ef(1)-\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}\right)\right\} g(2) = \frac{2}{e^4}\left(e^4\frac{f(2)}{2}-\frac{10}{3}\right) = f(2)-\frac{20}{3e^4}$$

그러므로 $f(2)-g(2)=\frac{20}{3e^4}$

4) ①

ㄱ. (가), (나)에 의하여 $f(x) = -f(-x)$ 이고 $f(-x) \quad 1$이므로 $-f(-x) \quad -1$ 이다.

$\therefore\ f(x) \quad -1 \quad \therefore$참

ㄴ. $f(x)$는 전 구간에서 미분 가능하고 연속인 원점 대칭 함수이므로 반드시 원점을 지나야 한다.

또한 $f(x) \quad 1$, $f(x) \quad -1$ 이기 위해 $f(x)$은 -1과 1 사이여야 한다.

$1 < f\ x) < 1$

( )에서

$f'(x) = \{1+f(x)\}\{1+f(-x)\} = \{1+f(x)\}\{1-f(x)\} = 1-\{f(x)\}$

$\therefore\ f'(x) > 0$

함수 $f(x)$는 전 구간에서 증가한다. ∴거짓

ㄷ. $f'(x) = 1-\{f(x)\}^2$

양변을 미분하면 $f''(x) = -2f(x)f'(x)$

$(0,0)$에서만 이계도함수의 부호가 바뀌므로 변곡점은 오직 하나이다. ∴거짓

따라서 옳은 것은 ㄱ 뿐이다.

[다른풀이]

ㄷ에서 $f(x) = -f(-x)$

$f'(x) = (1+f(x))(1-f(x))$

$\frac{f'(x)}{(1+f(x))(1-f(x))} = 1$

$\frac{f'(x)}{(f(x)+1)(f(x)-1)} = -1$

$\frac{f'(x)}{f(x)-1} - \frac{f'(x)}{f(x)+1}\,dx = \int -2\,dx$

$\ln|f(x)-1| - \ln|f(x)+1| = -2x + \mathrm{C}$ $f(0) = 0$이므로

$\mathrm{C} = 0$

$-\frac{f(x)-1}{f(x)+1} = e^{-2x}$

$1-f(x) = e^{-2x}f(x) + e^{-2x}$

$e^{-2x}+1)f(x) = 1-e^{-2x}$

$f(x) = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$