

# 수학 영역(가형) by 고지우

**5지선다형**

1. 로그부등식  $2\log_2(x-4) \leq \log_2(x-1)+2$ 를 만족시키는 모든 자연수  $x$ 의 개수는? [2점]

- ① 4      ② 5      ③ 6      ④ 7      ⑤ 8

2.  $-3 \leq x \leq 2$ 에서 함수  $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$ 의 최솟값은? [2점]

- ①  $\frac{5}{8}$       ②  $\frac{11}{16}$       ③  $\frac{3}{4}$       ④  $\frac{13}{16}$       ⑤  $\frac{7}{8}$

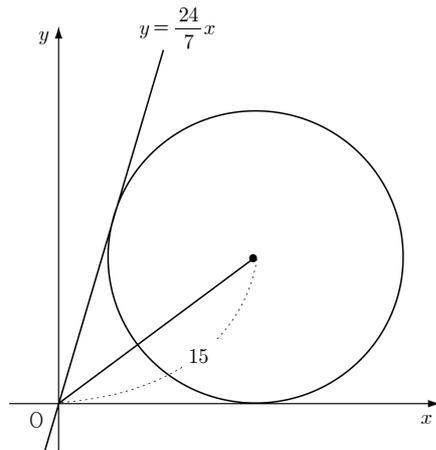
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 \cos x}$ 의 값은? [2점]

- ① 1      ②  $\frac{1}{2}$       ③  $\frac{1}{4}$       ④  $\frac{1}{6}$       ⑤  $\frac{1}{8}$

4. 직선  $y = -\frac{4}{3}x$  위의 점  $P(a, b)$  ( $a < 0$ )에 대하여 선분 OP가  $x$ 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를  $\theta$ 라 할 때,  $\sin(\pi - \theta) + \cos(\pi + \theta)$ 의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

- ①  $\frac{7}{5}$       ②  $\frac{1}{5}$       ③ 0      ④  $-\frac{1}{5}$       ⑤  $-\frac{7}{5}$

5. 직선  $y = \frac{24}{7}x$ 와  $x$ 축에 동시에 접하고, 중심이 제1사분면에 있는 원이 있다. 원점에서 이 원의 중심까지의 거리가 15일 때, 원의 반지름의 길이는? [3점]



- ① 6      ② 7      ③ 8      ④ 9      ⑤ 10

6. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수  $f(x) = \ln \sqrt[3]{x}$ 의 역함수를  $g(x)$ 라 할 때,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{g(x)-1}$ 의 값은? [3점]

- ①  $\frac{1}{6}$       ②  $\frac{1}{4}$       ③  $\frac{1}{3}$       ④  $\frac{2}{3}$       ⑤  $\frac{3}{2}$

7. 집합  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 집합  $X$ 에서  $X$ 로의 함수  $f$  중  $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=12$ 를 만족시키는 함수  $f$ 의 개수는? [3점]

- ① 27              ② 28              ③ 29  
④ 30              ⑤ 31

8. 함수  $f(x) = x^{\ln x} (x > 0)$ 에 대하여  $f'(e)$ 의 값은? [3점]

- ① 0              ②  $\frac{e}{2}$               ③ 2              ④  $e$               ⑤ 4

9. 함수  $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2} \sin x$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보기>

ㄱ. 함수  $f(x)$ 의 주기는  $2\pi$ 이다.  
 ㄴ. 함수  $f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.  
 ㄷ. 함수  $f(x)$ 의 최댓값은  $\frac{1}{2}$ , 최솟값은  $-\frac{3}{2}$ 이다.

- ① ㄱ              ② ㄱ, ㄴ              ③ ㄱ, ㄷ  
④ ㄴ, ㄷ              ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

# 수학 영역(가형)

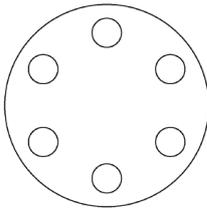
3

10. 함수  $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^6} dt$  에 대하여 상수  $a$  가  $f(a) = \frac{1}{2}$  을

만족시킬 때,  $\int_0^a \frac{e^{f(x)}}{1+x^6} dx$  의 값은? [3점]

- ①  $\frac{\sqrt{e}-1}{2}$       ②  $\sqrt{e}-1$       ③ 1  
 ④  $\frac{\sqrt{e}+1}{2}$       ⑤  $\sqrt{e}+1$

11. 그림과 같이 최대 6개의 용기를 넣을 수 있는 원형의 실험기구가 있다. 서로 다른 6개의 용기 A, B, C, D, E, F를 이 실험 기구에 모두 넣을 때, A와 B가 이웃하게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



- ① 36      ② 48      ③ 60      ④ 72      ⑤ 84

12.  $0 < a < 1 < b < 2$  를 만족시키는 두 실수  $a, b$  에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

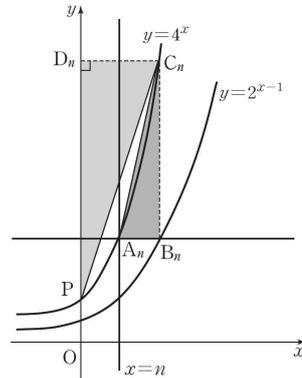
<보기>

ㄱ.  $2^a < 2^b$   
 ㄴ.  $\log_a b < 0$   
 ㄷ.  $2^b < b^2$

- ① ㄴ      ② ㄷ      ③ ㄱ, ㄴ  
 ④ ㄱ, ㄷ      ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 자연수  $n$  에 대하여 그림과 같이 직선  $x=n$  이 곡선  $y=4^x$  과 만나는 점을  $A_n$  이라 하고, 점  $A_n$  을 지나고  $x$  축과 평행한 직선이 곡선  $y=2^{x-1}$  과 만나는 점을  $B_n$  이라 하자. 점  $B_n$  을 지나고  $y$  축과 평행한 직선이 곡선  $y=4^x$  과 만나는 점을  $C_n$  이라 하고 점  $C_n$  에서  $y$  축에 내린 수선의 발을  $D_n$  이라 하자. 점  $P(0, 1)$  에 대하여 삼각형  $PC_nD_n$  의 넓이를  $S_n$ , 삼각형

$A_nB_nC_n$  의 넓이를  $T_n$  이라 할 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{T_n}$  의 값은? [3점]



- ① 1      ②  $\frac{5}{4}$       ③  $\frac{3}{2}$       ④  $\frac{7}{4}$       ⑤ 2

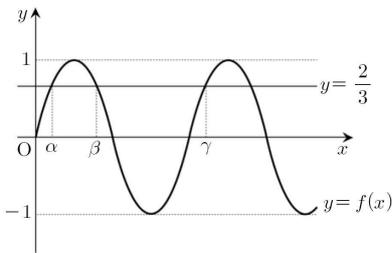
14. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수  $f$  가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가)  $-2 \leq x \leq 0$  일 때,  $f(x) = |x+1| - 1$
- (나) 모든 실수  $x$  에 대하여  $f(x) + f(-x) = 0$
- (다) 모든 실수  $x$  에 대하여  $f(2-x) = f(2+x)$

$-10 \leq x \leq 10$  에서  $y=f(x)$  의 그래프와  $y=(\frac{1}{2})^x$  의 그래프의 교점의 개수는? [4점]

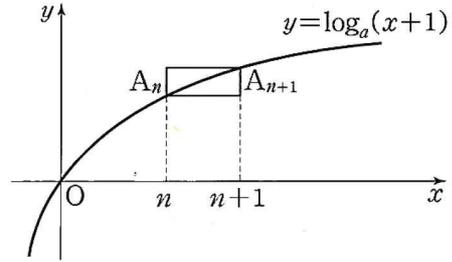
- ① 2      ② 3      ③ 4      ④ 5      ⑤ 6

15. 함수  $f(x) = \sin \pi x$  ( $x \geq 0$ ) 의 그래프와 직선  $y = \frac{2}{3}$  가 만나는 점의  $x$  좌표를 작은 것부터 차례대로  $\alpha, \beta, \gamma$  라 할 때,  $f(\alpha + \beta + \gamma + 1) + f(\alpha + \beta + \frac{1}{2})$  의 값은? [4점]



- ①  $-\frac{2}{3}$       ②  $-\frac{1}{3}$       ③ 0      ④  $\frac{1}{3}$       ⑤  $\frac{2}{3}$

16. 그림과 같이 로그함수  $y = \log_a(x+1)$  ( $a > 1$ ) 의 그래프가 두 직선  $x = n, x = n+1$  ( $n$  은 자연수) 과 만나는 점을 각각  $A_n, A_{n+1}$  이라 하자. 선분  $A_n A_{n+1}$  을 대각선으로 하고 각 변이  $x$  축 또는  $y$  축과 평행한 직사각형의 둘레의 길이를  $l_n$  이라 할 때,  $\sum_{k=1}^{30} l_k = 68$  이다. 실수  $a$  의 값은? [4점]



- ①  $2^{\frac{1}{2}}$       ②  $2^{\frac{3}{4}}$       ③ 2      ④  $2^{\frac{5}{4}}$       ⑤  $2^{\frac{3}{2}}$

17. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수  $a, b, c, d, e$  의 모든 순서쌍  $(a, b, c, d, e)$  의 개수는? [4점]

- (가)  $a+b+c = 3(d+e)$
- (나)  $0 < a+b+c+d+e \leq 10$

- ① 100                      ② 102                      ③ 104  
 ④ 106                      ⑤ 108

18. 다음은  $n$ 이 소수일 때,  ${}_{2n}C_n - 2$ 는  $n^2$ 의 배수임을 증명한 것이다.

<증명>  
 $(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} {}_{2n}C_k x^k$   
 에서 (가)의 계수는  ${}_{2n}C_n$ 이다.  
 한편  $(1+x)^n(1+x)^n = \left(\sum_{k=0}^n {}_nC_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^n {}_nC_{n-k} x^{n-k}\right)$   
 에서 (가)의 계수는  $\sum_{k=0}^n ({}_nC_k \cdot \text{(나)})$ 이다.  
 따라서  ${}_{2n}C_n = ({}_nC_0)^2 + ({}_nC_1)^2 + ({}_nC_2)^2 + \dots + ({}_nC_n)^2$ 이다.  
 그런데  $n$ 이 소수이므로 (다)인 자연수  $k$ 에 대하여  ${}_nC_k$ 는  $n$ 의 배수이다.  
 따라서 (다)인 자연수  $k$ 에 대하여  $({}_nC_k)^2$ 은  $n^2$ 의 배수이고  ${}_nC_0 = {}_nC_n = 1$ 이므로  ${}_{2n}C_n - 2$ 는  $n^2$ 의 배수이다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

- | (가)        | (나)              | (다)                 |
|------------|------------------|---------------------|
| ① $x^n$    | ${}_nC_{n-k}$    | $1 \leq k \leq n$   |
| ② $x^n$    | ${}_nC_{n-k}$    | $1 \leq k \leq n-1$ |
| ③ $x^n$    | ${}_{2n}C_{n-k}$ | $1 \leq k \leq n$   |
| ④ $x^{2n}$ | ${}_nC_{n-k}$    | $1 \leq k \leq n-1$ |
| ⑤ $x^{2n}$ | ${}_{2n}C_{n-k}$ | $1 \leq k \leq n$   |

19. 곡선  $y=e^x$  위의 점  $P(t, e^t)$ 에서 접선이  $x$ 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를  $\theta(t)$ 라 할 때,  $\int_0^{\ln 2} e^t \sin \theta(t) dt$ 의 값은?

[4점]

- |                  |                         |                  |
|------------------|-------------------------|------------------|
| ① $2 - \sqrt{2}$ | ② $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ | ③ $\sqrt{5} - 1$ |
| ④ $3 - \sqrt{2}$ | ⑤ $4 - \sqrt{2}$        |                  |

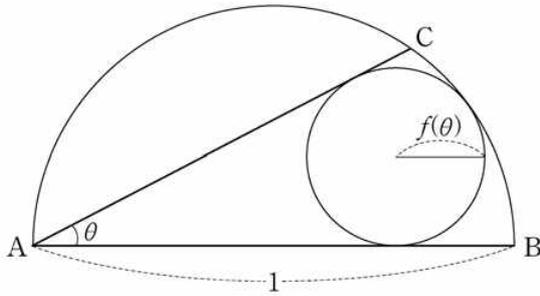
# 6

## 수학 영역(가형)

20. 그림과 같이 길이가 1 인 선분 AB 를 지름으로 하는 반원 위에 점 C 를 잡고  $\angle BAC = \theta$  라 하자. 호 BC 와 두 선분 AB, AC 에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를  $f(\theta)$  라 할 때,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\tan \frac{\theta}{2} - f(\theta)}{\theta^2} = \alpha$$

이다.  $100\alpha$  의 값은? (단,  $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ ) [4점]



- ① 25      ② 30      ③ 35      ④ 40      ⑤ 45

21. 함수  $f(x)$  가 다음 조건을 만족시킨다.

(가)  $-1 \leq x < 1$  일 때  $f(x) = \frac{(x^2-1)^2}{x^4+1}$  이다.

(나) 모든 실수  $x$  에 대하여  $f(x+2) = f(x)$  이다.

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ.  $\int_{-2}^2 f(x) dx = 4 \int_0^1 f(x) dx$

ㄴ.  $1 < x < 2$  일 때,  $f'(x) > 0$  이다.

ㄷ.  $\int_1^3 x |f'(x)| dx = 4$

- ① ㄱ                      ② ㄷ                      ③ ㄱ, ㄴ  
 ④ ㄴ, ㄷ                ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

**단답형**

22.  $0 \leq x \leq 3$ 에서 함수  $f(x) = 2^{-x^2+4x+a}$ 의 최솟값이 4일 때,  $f(x)$ 의 최댓값을 구하시오. (단,  $a$ 는 상수이다.) [3점]

23. 방정식  $\sin^2 x - \sin x = 1 - k$ 가 실근을 갖도록 하는 상수  $k$ 의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라 할 때,  $20M + m$ 의 값을 구하시오. (단,  $0 \leq x < 2\pi$ 이다.) [3점]

24. 세 양수  $a, b, c$ 에 대하여 함수  $f(x) = a \log_b x + c$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선  $y = f(x)$ 는 두 점  $(1, 4), (b, 6)$ 을 지난다.

(나)  $f'(1) = \frac{1}{\ln 2}$

$a + b + c$ 의 값을 구하시오. (단,  $b \neq 1$ ) [3점]

25. 함수  $f(x)$ 가  $x > 0$ 인 모든 실수  $x$ 에 대하여 부등식

$$e \ln x \leq f(x) \leq e^x - e$$

를 만족시킬 때,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1}$ 의 값을  $p$ 라 할 때,  $\frac{6}{e}p$ 의 값을

구하시오. [3점]

26. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수  $f(x)$ 와 그 도함수  $f'(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f'(-x) = -f'(x)$ 이다.

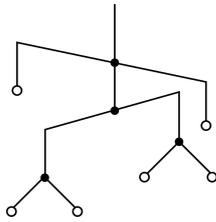
(나)  $\int_0^1 f'(x) dx = -\frac{1}{3}$ ,  $f(0) = 0$

(다)  $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{1}{5}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} f\left(\frac{2k}{n} - 1\right) = -\frac{a}{b}$ 라 할 때,  $a+b$ 의 값을 구하여라.

[4점]

27. 좌우 대칭인  $\sqcap$  모양과  $\sphericalangle$  모양의 철사가 각각 두 개씩 있다. 그림과 같이 각 철사의 가운데를 서로 연결한 후, 여섯 군데의 고리에 서로 다른 6개의 인형 A, B, C, D, E, F를 매달아 회전모빌을 만들려고 한다. 이때 만들 수 있는 서로 다른 회전모빌의 개수를 구하시오. (단, 그림의  $\bullet$  부분은 회전 가능하고,  $\sphericalangle$  모양의 두 철사는 합동이다.) [4점]



28. 함수  $f(x) = x + \cos x + \frac{\pi}{4}$ 에 대하여 함수  $g(x)$ 를

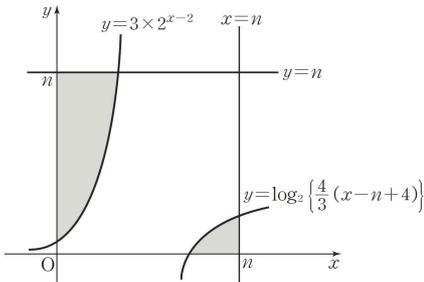
$g(x) = |f(x) - k|$  ( $k$ 는  $0 < k < 6\pi$ 인 상수)

라 하자. 함수  $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록

하는 모든  $k$ 의 값의 합을  $\frac{q}{p}\pi$ 라 할 때,  $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

29. 4 이상의 자연수  $n$ 에 대하여 좌표평면에서 곡선  $y=3 \times 2^{x-2}$ ,  $y$ 축 및 직선  $y=n$ 으로 둘러싸인 도형의 경계 및 내부에 포함된  $x$ 좌표와  $y$ 좌표가 모두 정수인 점의 개수를  $a$ , 곡선  $y=\log_2\left\{\frac{4}{3}(x-n+4)\right\}$ ,  $x$ 축 및 직선  $x=n$ 으로 둘러싸인 도형의 경계 및 내부에 포함된  $x$ 좌표와  $y$ 좌표가 모두 정수인 점의 개수를  $b$ 라 하자.  $a-b=32$ 일 때, 자연수  $n$ 의 값을 구하시오. [4점]



30. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가)  $x \leq b$ 일 때,  $f(x) = a(x-b)^2 + c$ 이다. (단,  $a, b, c$ 는 상수이다.)

(나) 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x) = \int_0^x \sqrt{4-2f(t)} dt$ 이다.

$\int_0^6 f(x)dx = \frac{q}{p}$ 일 때,  $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

※ 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.