

수학 영역(나형) by 고지우

5지선다형

1. $2^{\frac{4}{3}} \times \sqrt[3]{4}$ 의 값은? [2점]

- ① 2 ② 4 ③ 6
- ④ 8 ⑤ 10

2. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 + a_2 = \frac{3}{2}, \quad \frac{a_4}{a_3} = 2$$

일 때, a_5 의 값은? [2점]

- ① 5 ② 6 ③ 7
- ④ 8 ⑤ 9

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} + 2}{5^n + 3^n}$ 의 값은? [2점]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

4. 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ($a > 0, b > 0$)이 점 A(2, 3)을 지날 때, ab 의 최솟값은? [3점]

- ① 18 ② 21 ③ 24
- ④ 27 ⑤ 30

5. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 서로 다른 두 부분집합 X, Y 에 대하여 $(X \cup Y) - (X \cap Y)$ 의 가장 작은 원소가 X 에 속할 때, $X \supset Y$ 라 하자. U 의 부분집합 $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 5\}$, $C = \{2, 4, 5\}$ 에 대하여 옳은 것은? [3점]

- ① $A \supset B \supset C$ ② $A \supset C \supset B$ ③ $B \supset A \supset C$
 ④ $B \supset C \supset A$ ⑤ $C \supset A \supset B$

6. 자연수 n 에 대하여 100^n 의 모든 양의 약수의 합을 a_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{100^n}$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
 ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

7. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_k = n^2 - n \quad (n \geq 1)$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10} k a_{4k+1}$ 의 값은? [3점]

- ① 2960 ② 3000 ③ 3040
 ④ 3080 ⑤ 3120

8. 두 실수 x, y 에 대하여

$$75^x = \frac{1}{5}, \quad 3^y = 25$$

일 때, $\frac{1}{x} + \frac{2}{y}$ 의 값은? [3점]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

9. 유리함수 $y = \frac{5}{x-p} + 2$ 의 그래프가 제3사분면을 지나지 않도록 하는 정수 p 의 최솟값은? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

10. 세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 에 대한 옳은 설명을 <보기>에서 모두 고른 것은? [3점]

< 보 기 >

ㄱ. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{a_n b_n\}$ 이 모두 수렴하면, 수열 $\{b_n\}$ 은 수렴한다.

ㄴ. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 2b_n) = 0$ 이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ 이면, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ 이다.

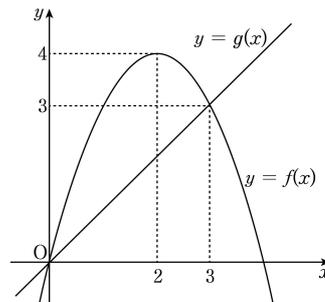
ㄷ. $a_n < b_n < c_n$ 이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n - a_n) = 0$ 이면, 수열 $\{b_n\}$ 은 수렴한다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

11. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $n < a_n < n+1$ 을 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$ 의 값은? [3점]

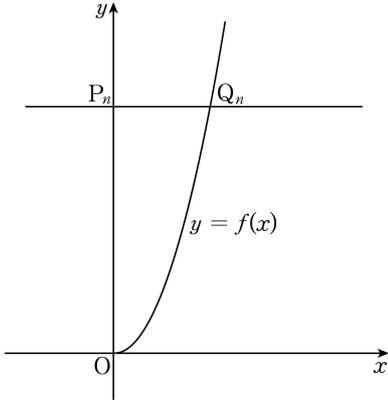
- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

12. 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=g(x)$ 가 원점과 점 $(3, 3)$ 에서 만난다. $h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^{n+1} + 5\{g(x)\}^n}{\{f(x)\}^n + \{g(x)\}^{n+1}}$ 일 때, $h(2)+h(3)$ 의 값은? [3점]



- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

[13~14] 자연수 n 에 대하여 좌표가 $(0, 3n+1)$ 인 점을 P_n , 함수 $f(x) = x^2 (x \geq 0)$ 이라 하자. 점 P_n 을 지나고 x 축과 평행한 직선이 곡선 $y = f(x)$ 와 만나는 점을 Q_n 이라 할 때, 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



13 점 Q_n 의 y 좌표를 a_n 이라 할 때, $f^{-1}(a_2) \cdot f^{-1}(a_9)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ ② 7 ③ $7\sqrt{2}$ ④ $7\sqrt{3}$ ⑤ 14

14 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 R_n 은 직선 P_nR_n 의 기울기가 음수이고 y 좌표가 자연수인 점이다. 삼각형 P_nOQ_n 의 넓이를 S_n , 삼각형 P_nOR_n 의 넓이가 최대일 때 삼각형 P_nOR_n 의 넓이를 T_n 이라 하자. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - T_n}{\sqrt{n}}$ 의 값은?

(단, 0는 원점이다.) [4점]

- ① $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{6}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{4}$

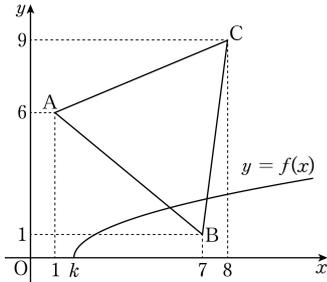
15 두 조건

$$p : |x-a| + |y-b| < 3, \quad q : x^2 + y^2 < 16$$

에 대하여 p 가 q 이기 위한 충분조건이 되도록 하는 두 정수 a 와 b 의 순서쌍 (a, b) 의 개수는? [4점]

- ① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 무수히 많다

16. 무리함수 $f(x) = \sqrt{x-k}$ 에 대하여 좌표평면에 곡선 $y=f(x)$ 와 세 점 A(1, 6), B(7, 1), C(8, 9)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 곡선 $y=f(x)$ 와 함수 $f(x)$ 의 역함수의 그래프가 삼각형 ABC와 만나도록 하는 실수 k 의 최댓값은? [4점]



- ① 6 ② 5 ③ 4 ④ 3 ⑤ 2

17. 이차함수 $f(x) = ax^2 + c$ 에 대하여 $|x| \leq 1$ 이면 $|f(x)| \leq 2$ 일 때, a 의 최댓값은? [4점]

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ 4 ⑤ 8

18. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \dots\dots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = (-1)^2 \times 1^2 = 1$$

$$(\text{우변}) = (-1)^2 \times \frac{1 \times 2}{2} = 1$$

따라서 (*)이 성립한다.

(ii) $n = m$ 일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k+1} k^2 &= \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} k^2 + \boxed{(\text{가})} \\ &= \boxed{(\text{나})} + \boxed{(\text{가})} \\ &= (-1)^{m+2} \cdot \frac{(m+1)(m+2)}{2} \end{aligned}$$

이다.

따라서 $n = m+1$ 일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 (*)이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$ 이라 할 때, $\frac{f(5)}{g(2)}$ 의 값은? [4점]

- ① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

19. 유리함수 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ 의 그래프가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 원점을 지난다.

(나) 점근선의 방정식은 $x=1$ 과 $y=-2$ 이다.

이때, 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $f^{-1}(x)$ 라 할 때, $f^{-1}(-1)$ 의 값은?
[4점]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

20. 이차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

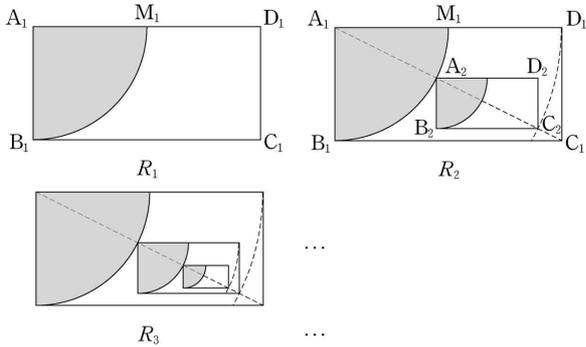
(가) $f(0) = f(2) = 0$

(나) 이차방정식 $f(x) - 6(x-2) = 0$ 의 실근의 개수는 1이다.

방정식 $(f \circ f)(x) = -3$ 의 서로 다른 실근을 모두 곱한 값은?
[4점]

- ① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ -1 ④ $-\frac{4}{3}$ ⑤ $-\frac{5}{3}$

21. 그림과 같이 $\overline{A_1D_1} = 2$, $\overline{A_1B_1} = 1$ 인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 에서 선분 A_1D_1 의 중점을 M_1 이라 하자. 중심이 A_1 , 반지름의 길이가 $\overline{A_1B_1}$ 이고 중심각의 크기가 90° 인 부채꼴 $A_1B_1M_1$ 을 그리고, 부채꼴 $A_1B_1M_1$ 에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 그림 R_1 에서 부채꼴 $A_1B_1M_1$ 의 호 B_1M_1 이 선분 A_1C_1 과 만나는 점을 A_2 라 하고, 중심이 A_1 , 반지름의 길이가 $\overline{A_1D_1}$ 인 원이 선분 A_1C_1 과 만나는 점을 C_2 라 하자. 가로와 세로의 길이의 비가 $2:1$ 이고 가로가 선분 A_1D_1 과 평행한 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 를 그리고, 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 에서 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 부채꼴에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{5}{16}\pi$ ② $\frac{11}{32}\pi$ ③ $\frac{3}{8}\pi$
- ④ $\frac{13}{32}\pi$ ⑤ $\frac{7}{16}\pi$

단답형

22. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_6 + a_{11} + a_{15} + a_{20} = 32$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{25}$ 의 합을 구하시오. [3점]

23. 무한등비수열 $\left\{ \left(\frac{2x-3}{5} \right)^n \right\}$ 이 수렴하도록 하는 모든 정수 x 의 합을 구하시오. [3점]

24. X선 필름의 사진농도 D , 입사하는 빛의 세기 I_0 , 투과하는 빛의 세기 I 사이에 $D = \log_{10} I_0 - \log_{10} I$ 가 성립한다. X선 필름의 사진농도가 2일 때, 입사하는 빛의 세기는 투과하는 빛의 세기의 a 배이다. 이때, 상수 a 의 값을 구하시오. [3점]

25. 실수 전체의 집합 R 의 두 부분집합

$$A = \{x \mid x^2 - x - 12 \leq 0\}, B = \{x \mid x < a \text{ 또는 } x > b\}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) A \cup B = R$$

$$(나) A - B = \{x \mid -3 \leq x \leq 1\}$$

두 상수 a, b 에 대하여 $b - a$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 수열 $\{a_n\}$ 이 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k a_k = n^3$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n-1} + a_{2n}}{n}$ 의 값을 구하시오. [4점]

27. 1보다 크고 10보다 작은 세 자연수 a, b, c 에 대하여

$$\frac{\log_c b}{\log_a b} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\log_b c}{\log_a c} = \frac{1}{3}$$

일 때, $a + 2b + 3c$ 의 값을 구하시오. [4점]

28. 두 집합

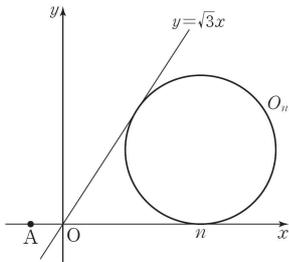
$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
에 대하여 집합 P 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $n(P \cap A) = 2$
- (나) $P - B = \emptyset$
- (다) 집합 P 의 모든 원소의 합은 28이다.

집합 $P - A$ 의 모든 원소의 곱을 구하시오. [4점]

29. 자연수 n 에 대하여 원 O_n 은 x 축과 점 $(n, 0)$ 에서 접하고 직선 $y = \sqrt{3}x$ 와 접한다. 원 O_n 위를 움직이는 점과 점 $A(-1, 0)$ 사이의 거리의 최댓값을 a_n , 최솟값을 b_n 이라 할 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ 의 값을 구하시오. (단, 원 O_n 의 중심은 제1사분면 위에 있다.) [4점]



30. 유리함수 $f(x) = \frac{8x}{2x-15}$ 와 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$a_n = f(n)$ 이다. $\sum_{n=1}^m a_n \leq 73$ 을 만족시키는 자연수 m 의 최댓값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.